82$^{\text{ΟΣ}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΜΕ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
«Ο ΘΑΛΗΣ»
Παρασκευή 11 Νοεμβρίου 2022

Τάξη Β' Γυμνασίου
Εκφωνήσεις και ενδεικτικές απαντήσεις

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)$$

Απάντηση

Έχουμε:

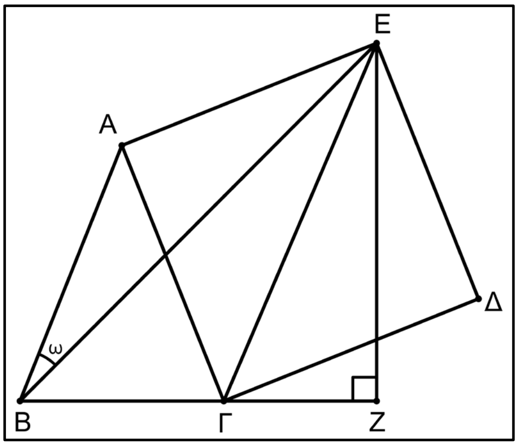
$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)\\&=\left(\left(\frac{-21}{7}\right)^7+\left(\frac{-15}{-5}\right)^7+4044\right):\left(\left(\frac{-14}{7}\right)^3+\left(\frac{-18}{-9}\right)^3+2\right)\\&=\left((-3)^7+3^7+4044\right):\left((-2)^3+2^3+2\right)\\&=\left(-3^7+3^7+4044\right):\left(-2^3+2^3+2\right)\\&=4044:2\\&=2022\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $Α\hat{Β}Ε=ω$ και η ευθεία ΕΖ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΖ, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

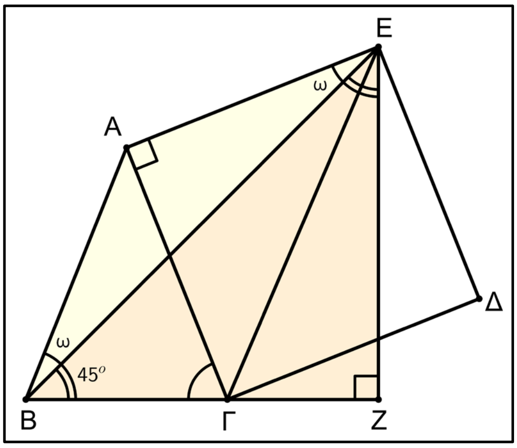
(2) Να αποδείξετε ότι: $ΒΖ=ΕΖ$



Παρατήρηση: Να κάνετε στο γραπτό σας το δικό σας σχήμα.

Απάντηση

(1)



Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ διότι $AB = A\Gamma$ και $AE = A\Gamma$. Επομένως $A\hat{E}B = \omega$. Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$$B\hat{A}E + A\hat{B}E + A\hat{E}B = 180^o \quad \Rightarrow \quad \hat{A} + 90^o + \omega + \omega = 180^o$$
$$\Rightarrow \quad \hat{A} = 90^o - 2\omega$$

Για τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ που πρόκεινται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^o - \hat{A}}{2} = \frac{180^o - \left(90^o - 2\omega\right)}{2} = \frac{90^o + 2\omega}{2} = 45^o + \omega$$

(2)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΕ η οξεία γωνία του $E\hat{B}Z$ του είναι:

$$E\hat{B}Z = \hat{B} - \omega = 45^o + \omega - \omega = 45^o$$

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισοσκελές διότι η άλλη οξεία γωνία του $B\hat{E}Z$ είναι:

$$B\hat{E}Z = 90^o - E\hat{B}Z = 90^o - 45^o = 45^o$$

Επομένως

$$BZ = EZ$$

Πρόβλημα 3 **(μονάδες 7)**

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Τότε διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Απάντηση – 1ος τρόπος

Έστω ότι ο κύριος Γιάννης δίνει x καραμέλες στον Δημήτρη. Τότε:

- x καραμέλες έχει ο Δημήτρης.
- 7x καραμέλες έχει ο Γιώργος.
- x καραμέλες έμειναν στη σακούλα.
- 9x καραμέλες έχει αγοράσει ο κύριος Γιάννης.

Στη συνέχεια τα παιδιά τρώνε κάποιες από τις καραμέλες και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Έστω ότι την επόμενη μέρα ο Γιώργος έχει y καραμέλες. Τότε:

- $7y$ καραμέλες έχει ο Δημήτρης.
- y καραμέλες έχει ο Γιώργος.
- y καραμέλες έμειναν στη σακούλα.
- $9y$ καραμέλες περίσσεψαν συνολικά.

Δηλαδή τα παιδιά έφαγαν $9x-9y$ καραμέλες. Προφανώς ισχύει $9x>9y$, δηλαδή $x>y$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x-9y \geq \frac{3}{4}\cdot 9x$$

Αφού $x>y$ ισχύει $7x>y$. Επομένως οι καραμέλες του Γιώργου αρχικά ήταν περισσότερες και την επόμενη μέρα μειώθηκαν κατά $7x-y$. Ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό που μειώθηκαν συνολικά οι καραμέλες, δηλαδή από $9x-9y$ που έφαγαν και τα δύο παιδιά μαζί. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} 9x-9y \geq 7x-y \quad &\Leftrightarrow \quad 9x-8y \geq 7x \\ &\Leftrightarrow \quad 8x-8y \geq 6x \\ &\Leftrightarrow \quad x-y \geq \frac{6}{8}x \\ &\Leftrightarrow \quad x-y \geq \frac{3}{4}x \\ &\Leftrightarrow \quad 9x-9y \geq \frac{3}{4}\cdot 9x \end{aligned}$$

Απάντηση – 2ος τρόπος

Έστω ότι ο κύριος Γιάννης αγόρασε ν καραμέλες και αφού τις έκανε εννέα ίσα μερίδια έδωσε ένα από αυτά στο Δημήτρη, επτά στο Γιώργο και ένα έμεινε στη σακούλα. Δηλαδή:

- $\frac{\nu}{9}$ καραμέλες έχει ο Δημήτρης.
- $7\cdot\frac{\nu}{9}$ καραμέλες έχει ο Γιώργος.
- $\frac{\nu}{9}$ καραμέλες έμειναν στη σακούλα.

Στη συνέχεια τα δύο παιδιά τρώνε α καραμέλες και μένουν $\nu-\alpha$. Την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Τότε σύμφωνα με το πρόβλημα:

- $7\cdot\frac{\nu-\alpha}{9}$ καραμέλες έχει ο Δημήτρης.
- $\frac{\nu-\alpha}{9}$ καραμέλες έχει ο Γιώργος.
- $\frac{\nu-\alpha}{9}$ καραμέλες έμειναν στη σακούλα.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha \geq \frac{3}{4}\nu$

Αρχικά οι καραμέλες του Δημήτρη μαζί με αυτές που είχαν μείνει στην σακούλα ήταν:

$$\frac{\nu}{9}+\frac{\nu}{9}=\frac{2\nu}{9}$$

Την άλλη μέρα οι καραμέλες του Δημήτρη μαζί με αυτές που έμειναν στη σακούλα είναι:

$$7\cdot\frac{\nu-\alpha}{9}+\frac{\nu-\alpha}{9}=8\cdot\frac{\nu-\alpha}{9}=\frac{8\nu-8\alpha}{9}$$

Το άθροισμα αυτό, δηλαδή το $\frac{8\nu-8\alpha}{9}$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο αρχικό άθροισμα, δηλαδή το $\frac{2\nu}{9}$. Επομένως:

$$\frac{2\nu}{9}\geq\frac{8\nu-8\alpha}{9}\ \Rightarrow\ 2\nu\geq 8\nu-8\alpha\ \Rightarrow\ 8\alpha\geq 6\nu\ \Rightarrow\ \alpha\geq\frac{3}{4}\nu$$

Δημ. Σπαθάρας

τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών