THE MATHEMATICAL GRAMMAR SCHOOL CUP

-MATHEMATICS- 29 June 2022

Ο διαγωνισμός αποτελείται από 12 προβλήματα σε δύο σελίδες. Τα προβλήματα διαιρούνται σε δύο μέρη: Σε πολλαπλής επιλογής και σε αυτά που πρέπει να απαντηθούν πλήρως στο φύλλο απαντήσεων. Η διάρκεια του διαγωνισμού είναι 180 λεπτά (3 ώρες). Η χρήση υπολογιστών και άλλων ηλεκτρονικών βοηθημάτων απαγορεύεται αυστηρά.

ΜΕΡΟ ΠΡΩΤΟ

Τα προβλήματα 1 έως και 8 είναι πολλαπλής επιλογής. Υπάρχουν πέντε επιλογές και ακριβώς μία από αυτές είναι η σωστή. Στο φύλλο απαντήσεων θα κυκλώσετε μόνο την απάντηση που θεωρείται σωστή. Κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε **5 μονάδες**.

1. Έστω B το σύνολο των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από τον αριθμό 10^6 στους οποίους εμφανίζεται το ψηφίο 2 είτε το ψηφίο 7. Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B έχει άθροισμα ψηφίων που είναι ίσο με:

(A) 18 (B) 30 (C) 36 (D) 42 (E) 45

2. Έστω A το σύνολο των ακεραίων αριθμών **n** για τους οποίους ο $\mathbf{2^n + 2^8 + 2^{11}}$ είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε, το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A είναι:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) $+\infty$

3. Έστω **d** το τελευταίο ψηφίο του αριθμού **x**, όπου x είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών $2^{2^2}+1,\ \ 2^{2^3}+1,\ \ 2^{2^4}+1,\ \dots,\ 2^{2^{2022}}+1$. Τότε ο αριθμός **d** είναι ίσος με:

(A) 1 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) 9

4. Οι γωνίες A και B του τριγώνου ABC είναι $\mathbf{60^o}$ και $\mathbf{48^o}$ αντίστοιχα. Η ευθεία **p** που διέρχεται από το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC και είναι παράλληλη στην πλευρά AC, τέμνει την ευθεία AB στο σημείο P. Αν Q είναι σημείο του BC, ώστε $BC = 3\cdot BQ$, τότε η γωνία BPQ ισούται με:

(A) 20^o (B) 24^o (C) 30^o (D) 32^o (E) 48^o

5. Έστω Q το σύνολο των ρητών αριθμών και $f: Q \to Q$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(α) $(x-y)\cdot f(x+y) - (x+y)\cdot f(x-y) = 4\cdot xy\cdot(x^2 - y^2)$ για όλους τους ρητούς x, y.

(β) $f(1) = -1$.

Τότε, το πλήθος των ακεραίων διαιρετών του αριθμού f(10) είναι:

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 36

6. Έστω ABCD ένα κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών C και D του τετράπλευρου τέμνονται πάνω στην πλευρά AB και ότι AD = 5 και BC = 2. Τότε, το γινόμενο AB·(AD - BC) ισούται με:

(A) 18 (B) 21 (C) 24 (D) 27 (E) 30

7. Έστω C το σύνολο των θετικών ακεραίων **n** για τους οποίους υπάρχει ένα πολυώνυμο p_n βαθμού **n** με ακέραιους συντελεστές, ώστε να ισχύει η σχέση $p_n(0) = 0$ και η εξίσωση $p_n(x) - n = 0$ έχει ακριβώς **n** ακέραιες λύσεις. Τότε η τιμή της παράστασης maxC – minC ισούται με:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Έστω ABCD ένα κυρτό τετράπλευρου εμβαδού 32. Αν για τα μήκη των τμημάτων AB, BD και DC ισχύει AB + BD + DC = 16, τότε το πηλίκο $\frac{AC}{BD}$ ισούται με:

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 3/2

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Τα προβλήματα 9 έως και 12 είναι προβλήματα πλήρους ανάπτυξης. Βαθμούς για τα προβλήματα αυτά θα λάβετε **μόνο αν όλες** οι απαντήσεις στα προβλήματα του πρώτου μέρους είναι σωστές.

9. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c ισχύει ότι $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 = 3}$, τότε να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}$

10. Έστω το τρίγωνο ABC και **k** ο περιγεγραμμένος του κύκλος. Έστω ότι $\mathbf{k_a}$ είναι ο κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές AB και AC και στον κύκλο k εσωτερικά στο σημείο A_1. Έστω B_1 και C_1 τα σημεία που ορίζονται με ανάλογο τρόπο όπως το σημείο A_1. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AA_1, BB_1 και CC_1 διέρχονται από κοινό σημείο.

11. Η **tilling** ενός πίνακα θεωρείται ως η κάλυψή του με δεδομένα σχήματα ώστε να μην αφήνει κενά και τα σχήματα αυτά να μην επικαλύπτονται. Θέλουμε να καλύψουμε έναν πίνακα **nxn** με τετρόμινα τύπου T (3 τετράγωνα στη σειρά και ένα στη μέση) και τύπου S ή Z, (3 τετράγωνα στη σειρά και ένα στην άκρη ή 2 τετράγωνα πάνω και δύο κάτω).

(1) Μπορούμε να καλύψουμε με τετρόμινα έναν 6 x 6 πίνακα;
(2) Μπορούμε να καλύψουμε με τετρόμινα έναν 10 x 10 πίνακα;
(3) Μπορούμε να καλύψουμε με τετρόμινα έναν 2022 x 2022 πίνακα;

12. Για ποιους μη αρνητικούς ακεραίους **n** ο αριθμός $\mathbf{9^n + 10^n + 11^n}$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;