Η «εξαφάνιση» των Διακριτών Μαθηματικών τροχοπέδη στη σωστή μαθηματική εκπαίδευση.

Κυριαζής Χρήστος
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας
e-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
e-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη.

Στα Μαθηματικά διακρίνονται δύο βασικοί τρόποι σκέψης: ο συνεχής και ο διακριτός. Συγκρίνοντάς τα τρέχοντα σχολικά εγχειρίδια και τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών με παλαιότερα, μπορούμε να διαπιστώσουμε τη ραγδαία μείωση των Μαθηματικών που εκφράζουν το διακριτό τρόπο σκέψης. Αυτό επηρεάζει τη μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα, αφού οι μαθητές δεν μπορούν να έχουν σφαιρική εικόνα για το τι πρεσβεύουν τα Μαθηματικά, κάτι που έχει ως άμεση συνέπεια να μην μπορούν να ξεφύγουν από το συνεχή τρόπο σκέψης. Με την παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τον μειωμένο ρόλο των Διακριτών Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Λέξεις κλειδιά: Διακριτά Μαθηματικά, μαθηματική εκπαίδευση, υποβάθμιση μαθηματικής παιδείας.

Abstract.

In Mathematics there are two basic ways of thinking: the continuous and the discrete one. Comparing the current school manuals and the corresponding directions of teaching with earlier ones, we can see the rapid decline in Mathematics expressing the discrete way of thinking. This affects mathematical education in Greece, since the students can’t have a global picture of what mathematics is supposed to do. Moreover they can’t escape from the continuous way of thinking. With this paper we will try to highlight the reduced role of Discrete Mathematics in the secondary education.

Τι είναι τα Διακριτά Μαθηματικά;

Η λέξη διακριτός είναι ρηματικό επίθετο από το ρήμα διακρίνω, δηλαδή μπορώ εύκολα να ξεχωρίσω το ένα από το άλλο. Τα Διακριτά Μαθηματικά ασχολούνται με τη μελέτη μαθηματικών δομών που είναι εκ φύσεως διακεκριμένες και δεν εμπεριέχεται σε αυτά η έννοια της συνέχειας. Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι πεπερασμένα σύνολα, αριθμήσιμα απειροσύνολα (π.χ. φυσικοί αριθμοί), γραφήματα και γλώσσες.

Παρουσίασαν αλματώδη αύξηση τις τελευταίες δεκαετίες, παράλληλα με την ανάπτυξη και διάδοση της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τα Μαθηματικά των πραγματικών ή και των μιγαδικών αριθμών (σύνολα που παίρνουν συνεχείς τιμές) δεν μπορούσαν να αποτυπώσουν τις ανάγκες της επιστήμης των υπολογιστών, οι οποίες εκφράζονται μέσα από το σύνολο των ακεραίων αριθμών (σύνολο που παίρνει διακριτές τιμές). Η διαφοροποίηση αυτή απεικονίστηκε και στα προγράμματα σπουδών των πανεπιστημίων με την εισαγωγή μαθημάτων που αφορούσαν τα Διακριτά Μαθηματικά.

Μερικοί τομείς των Μαθηματικών που χρησιμοποιούν διακριτό τρόπο σκέψης είναι η Μαθηματική Λογική, οι Πιθανότητες, η Θεωρία Γραφημάτων, οι Ακολουθίες, οι Σειρές, αλλά και:

- Η Θεωρία Συνόλων, που μελετά τα σύνολα και τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Η Συνδυαστική, η οποία είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη μετρήσιμων διακριτών δομών. Βασική εφαρμογή της είναι η καταμέτρηση τέτοιων δομών.
- Η Θεωρία Αριθμών, που είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τις ιδιότητες των ακεραίων αριθμών και έχει ως βασικό αντικείμενο μελέτης τους τους πρώτους αριθμούς. Ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους ανέφερε ότι «τα Μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η Θεωρία Αριθμών η βασίλισσα των μαθηματικών».
- Η Κρυπτογραφία, η οποία ασχολείται με τη μελέτη της ασφαλούς επικοινωνίας και ειδικότερα με το πώς ένα μήνυμα από μια κανονική, κατανοητή μορφή θα μετασχηματιστεί σε έναν «γρίφο», που για να αποκωδικοποιηθεί χρειάζεται η γνώση του κρυφού μετασχηματισμού. Η Θεωρία Αριθμών έχει άμεση εφαρμογή στη Κρυπτογραφία.
- Η Αριθμητική Ανάλυση, που είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη δημιουργία αλγορίθμων που χρησιμοποιούν ικανοποιητικές μαθηματικές προσεγγίσεις για την επίλυση προβλημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης. Όταν οι μέθοδοι της

συνεχούς σκέψης αποτυγχάνουν καλείται η Αριθμητική Ανάλυση να δώσει λύσεις γρήγορες και με επιθυμητή ακρίβεια. Βασικό πεδίο εφαρμογής είναι κάθε είδους εξίσωση (αλγεβρική, διαφορική), αλλά και σύστημα. Η ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστών από τα μέσα του 20ού αιώνα βοήθησε ώστε οι απαιτούμενες μαθηματικές διαδικασίες και οι πολύπλοκες αριθμητικές πράξεις να γίνονται πολύ γρήγορα.

Αναδρομή στα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η ύλη των Μαθηματικών μειώνεται συνεχώς, κάτι που οδηγεί σε μια διαρκή υποβάθμιση των Μαθηματικών. Οι μειώσεις αυτές πλήττουν κυρίως τον διακριτό τρόπο σκέψης των μαθητών δεδομένου ότι συρρικνώνεται ο, έτσι και αλλιώς, μικρός όγκος ύλης που τον υποστηρίζει.

Ανατρέχοντας στα αναλυτικά προγράμματα και τα βιβλία του Γυμνασίου εύκολα διαπιστώνει κάποιος ότι διαχρονικά στην ύλη των τριών τάξεων υπάρχουν πολύ λίγες ενότητες ή κεφάλαια που υποστηρίζουν το διακριτό τρόπο σκέψης. Ως απόδειξη των παραπάνω και χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς τα τρέχοντα βιβλία του Γυμνασίου, ενότητες που εμπίπτουν στα διακριτά μαθηματικά είναι:

- Από την Α΄ Γυμνασίου οι ενότητες της ευκλείδειας διαίρεσης, της διαιρετότητας, του Ε.Κ.Π. και του Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, που αποτελούν το 3% του σχολικού βιβλίου και είναι εντός διδακτέας ύλης,
- Από τη Β΄ Γυμνασίου καμία,
- Από τη Γ΄ Γυμνασίου το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων, που αποτελεί το 9% του σχολικού βιβλίου και είναι εντός διδακτέας ύλης.

Ανεβαίνοντας στο Λύκειο τα πράγματα δεν είναι πολύ διαφορετικά. Οι ανακατατάξεις και η συρρίκνωση της ύλης είναι συνεχείς διαδικασίες.

Με αφετηρία το 1978 στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου (Ντζιώρας, 1978) υπάρχει Μαθηματική Λογική, Θεωρία Συνόλων, τα αξιώματα του Peano, Μαθηματική Επαγωγή, Ακολουθίες-υπακολουθίες (αναλυτική μελέτη και όχι αναφορές), ακέραιο μέρος, Πρόοδοι (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική), Σειρές, ανατοκισμός, ίσες καταθέσεις, χρεολυσία, Συνδυαστική, Πιθανότητες, η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμοσμένη στα πολυώνυμα, ακόμα και το διωνυμικό θεώρημα!

Δέκα χρόνια μετά η κατάσταση έχει αλλάξει δραματικά.

- Στην Α΄ Λυκείου υπάρχει Μαθηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή.
- Στη Β΄ Λυκείου υπάρχουν Πρόοδοι (αριθμητική, γεωμετρική), η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμοσμένη στα πολυώνυμα, Στατιστική.
- Στη Γ΄ Λυκείου (πρώτη δέσμη) Ακολουθίες, Συνδυαστική και Πιθανότητες.

Η κατάσταση και πάλι αλλάζει όταν στη σχολική πραγματικότητα μπαίνουν οι κατευθύνσεις (σχολικό έτος 1999-2000).

- Στην Α΄ Λυκείου υπάρχουν αναφορές στη Μαθηματική Λογική,
- Στη Β΄ Λυκείου (γενική παιδεία) υπάρχουν Πρόοδοι (αριθμητική, γεωμετρική), η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμοσμένη στα πολυώνυμα (διαχρονικά εκτός διδακτέας ύλης),
- Στη Β΄ Λυκείου (θετική κατεύθυνση) υπάρχει Μαθηματική Επαγωγή και Θεωρία Αριθμών,
- Στη Γ΄ Λυκείου (γενική παιδεία) Στατιστική, Πιθανότητες και Συνδυαστική (ποτέ δεν ήταν στη διδακτέα ύλη).

Στη πορεία από το 2000 μέχρι σήμερα Μαθηματική Επαγωγή, Θεωρία Αριθμών και Στατιστική εξαφανίστηκαν. Έμειναν οι αναφορές στη Μαθηματική Λογική, οι Πρόοδοι και οι Πιθανότητες. Η μείωση είναι φανερά δραματική…

Η επιλογή των θεμελιωτών του αναλυτικού μας προγράμματος είναι σαφής. Ενότητες όπως η Συνδυαστική, η Θεωρία Αριθμών, οι Πιθανότητες είναι σε «έλλειψη», παρότι τα Διακριτά Μαθηματικά αναπτύσσονται διαρκώς και έχουν περίοπτη θέση στα προγράμματα των Πανεπιστημιακών σχολών (φυσικομαθηματικές σχολές, πολυτεχνικά τμήματα, τμήματα πληροφορικής, κτλ.). Η μαθηματική κοινότητα αναρωτιέται ποιο είναι το σκεπτικό, το σχέδιο για τη συγκεκριμένη προσέγγιση. Η προσωπική μας άποψη είναι ότι όποιο και αν είναι το σκεπτικό η τρομερή αυτή διαφοροποίηση δημιουργεί μαθητές χωρίς μια στοιχειωδώς σφαιρική εικόνα των μαθηματικών.

Επιπροσθέτως, αν κάποιος δει τα θέματα των εγχώριων Μαθηματικών διαγωνισμών όπως οι «Θαλής», «Ευκλείδης», «Αρχιμήδης» θα διαπιστώσει πως η γνώση από την πλευρά των μαθητών στα Διακριτά Μαθηματικά είναι επιβεβλημένη κάτι που έρχεται σε αντίφαση με τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών.

Επομένως, κάποιος μέσος μαθητής στην Ελλάδα τελειώνει το Λύκειο και δεν έχει μάθει βασικές έννοιες σε διάφορους κλάδους των Διακριτών Μαθηματικών και κατόπιν καλείται στις Πανεπιστημιακές σχολές που φοιτά να σπουδάσει άλλα αντικείμενα όπως Πληροφορική, Οικονομικά που χρησιμοποιούν αυτές τις έννοιες. Και εδώ εντοπίζεται ένα πρόβλημα ανακολουθίας αναλυτικών προγραμμάτων και προγραμμάτων σπουδών των Πανεπιστημιακών σχολών. Αν οι φοιτητές είχαν ήδη έρθει σε επαφή με αυτά τα Μαθηματικά από τη σχολική ηλικία είναι φυσικό να μπορούν να τα καταλάβουν καλύτερα και να αποδώσουν καλύτερα στις απαιτήσεις της σχολής τους.

Μια ματιά στη γειτονική Κύπρο.

Θέλοντας να συγκρίνουμε την εγχώρια κατάσταση με άλλες χώρες ελέγξαμε ενδεικτικά το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων της Κύπρου. Στον δεύτερο τόμο του βιβλίου των Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου στο κεφάλαιο 5 υπάρχουν Ακολουθίες, ενώ στο κεφάλαιο 11 Στατιστική και Πιθανότητες! Στη Β΄ Γυμνασίου πάλι στο κεφάλαιο 11 του δεύτερου τόμου έχουμε Στατιστική και Πιθανότητες, όπως και στο κεφάλαιο 6 του δεύτερου τόμου των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου.

Στο Λύκειο και πιο συγκεκριμένα στην Α΄ τάξη το μάθημα του κορμού έχει Στατιστική, όπως και στο μάθημα του προσανατολισμού. Στη Β΄ Λυκείου στο μάθημα του κορμού διδάσκονται Ακολουθίες και Στατιστική, ενώ και στο μάθημα προσανατολισμού Μαθηματική Λογική, Μαθηματική Επαγωγή, Ακολουθίες-Προόδους και Στατιστική. Στην τελευταία τάξη του Λυκείου στον κορμό διδάσκονται Σύνολα, Συνδυαστική και Πιθανότητες, ενώ στο μάθημα προσανατολισμού Σειρές, Σύνολα, Συνδυαστική και Πιθανότητες.

Κοιτάζοντας τα θέματα των Παγκύπριων εξετάσεων και πιο συγκεκριμένα στις πρόσφατες εισαγωγικές εξετάσεις για τα Μαθηματικά πρακτικής κατεύθυνσης (4-ωρο τεχνικών σχολών) βλέπουμε ότι στο θέμα 4 ζητείται από τους υποψήφιους να υπολογίσουν το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΝΑΔΟΧΟΣ. Μια κλασική εφαρμογή απαρίθμησης όπου με χρήση κατάλληλων τύπων (μεταθέσεις με επανάληψη) καταλήγουμε πως αυτοί είναι $\frac{8!}{2!2!} = 10.080$.

Παρόμοια θέματα συναντάμε και σε άλλα διαγωνίσματα των Παγκύπριων εξετάσεων. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά το θέμα 3 του Β΄ μέρους των εξετάσεων στα Μαθηματικά Θεωρητικής κατεύθυνσης (4-ωρο τεχνικών σχολών), όπου τέθηκε το εξής θέμα βασικής Συνδυαστικής με υπολογισμό Πιθανοτήτων:

Σε ένα τμήμα 18 μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής, οι 8 μαθητές προέρχονται από το χωριό Α. Από τους 18 μαθητές θα επιλεγεί τυχαία ομάδα 5 μαθητών για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια τελετή στο Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

i. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα, χωρίς να υπάρχει περιορισμός.
ii. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων στην πενταμελή ομάδα:
Κ = «Να μη συμμετέχει κανένας μαθητής από το χωριό Α»
Λ = «Να συμμετέχουν ακριβώς τρείς μαθητές από το χωριό Α»
Μ = «Να συμμετέχουν τουλάχιστον τέσσερις μαθητές από το χωριό Α»

Όπως αποδεικνύεται τα Διακριτά Μαθηματικά έχουν θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Κύπρου και αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης για την εισαγωγή των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Ας θυμηθούμε τι «χάνουν» οι μαθητές μας...

Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι τα Μαθηματικά της επιστήμης των Υπολογιστών. Επιπλέον αποτελούν και μέρος των μαθηματικών του «πραγματικού» κόσμου, κυρίως η Συνδυαστική και οι Πιθανότητες, αφού δίνουν απάντηση σε πολλά καθημερινά προβλήματα αποτελώντας όμορφες γνωστικές προκλήσεις.

Η Συνδυαστική είναι από εκείνους τους κλάδους των Μαθηματικών που έχουν άμεση εφαρμογή σε πράγματα που οι μαθητές γνωρίζουν και ζουν στη καθημερινότητά τους.

- Πόσες πεντάδες μπορούν να δημιουργηθούν από 45 διαφορετικούς αριθμούς και πόσες εξάδες αν ο έκτος αριθμός έχει 20 διαφορετικές επιλογές (ΤΖΟΚΕΡ);

  <u>Πεντάδες</u>: $\binom{45}{5}=\frac{45!}{5!40!}=1.221.759$.

  <u>Εξάδες</u>: $20\cdot\binom{45}{5}=20\cdot\frac{45!}{5!40!}=20\cdot\frac{45!}{5!40!}=\ 24.435.180$.

- Πόσες διαφορετικές δεκατριάδες δημιουργούνται από 3 στοιχεία (ΠΡΟΠΟ);

  <u>Δεκατριάδες</u>: $13^3=2.197$.

- Πόσες εξάδες μπορούν να δημιουργηθούν από 49 διαφορετικούς αριθμούς (ΛΟΤΤΟ);

  <u>Εξάδες</u>: $\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!43!}=\ 13.983.816$.

- Πόσοι είναι οι τετραψήφιοι φυσικοί αριθμοί που έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά μεταξύ τους;

Τετραψήφιοι: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4.536$.

Στη Θεωρία Αριθμών βασική είναι η έννοια της διαιρετότητας. Διαιρείται με το 3 ο αριθμός n^3+2n, αν ο n είναι μη μηδενικός φυσικός;

Χρησιμοποιώντας Μαθηματική Επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό είναι αληθές, αφού για $n=1$ ο αριθμός $1^3+2\cdot 1=3$ διαιρείται με το 3. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν ο αριθμός n^3+2n διαιρείται με το 3, θα διαιρείται με το 3 και ο αριθμός $(n+1)^3+2(n+1)$.

Πράγματι αφού

$$(n+1)^3+2(n+1)=(n^3+2n)+3(n^2+n+1),$$

ο αριθμός $(n+1)^3+2(n+1)$ διαιρείται με το 3, αφού και οι δύο προσθετέοι διαιρούνται με το 3.

Μια όμορφη εφαρμογή απλή στη θεώρηση και στη σκέψη που σίγουρα θα κέντριζε το ενδιαφέρον των μαθητών είναι η Αρχή της Περιστεροφωλιάς (Pigeonhole principle) ή Αρχή του Dirichlet. Αν σε ένα πλήθος ν φωλιών τοποθετήσουμε $\nu+1$ περιστέρια, τότε υποχρεωτικά 2 τουλάχιστον από αυτά θα βρεθούν στην ίδια φωλιά ή πιο γενικά αν $\kappa\cdot\nu+1$ περιστέρια τοποθετηθούν σε κ φωλιές, τότε σε μια τουλάχιστον φωλιά θα καθίσουν τουλάχιστον $\nu+1$ περιστέρια.

Η αρχή αυτή παρόλο που δεν υπάρχει σε κανένα σχολικό βιβλίο, ζητείται σε εγχώριους διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε. Για παράδειγμα στον διαγωνισμό «Θαλής» του 2000 για τη Γ΄ Γυμνασίου τέθηκε το εξής:

Σε μια Βαλκανική συνάντηση νέων συμμετείχαν 199 παιδιά, από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

Σκεπτόμενοι ότι έχουμε 199 περιστέρια (παιδιά) και 9 φωλιές (χώρες) σύμφωνα με την Αρχή της Περιστεροφωλιάς και το γεγονός ότι $199=9\cdot 22+1$, θα υπάρχει τουλάχιστον μια φωλιά (χώρα) τέτοια ώστε να δεχτεί τουλάχιστον $22+1=23$ περιστέρια (παιδιά). Τώρα αλλάζοντας ρόλους αν έχουμε 23 περιστέρια (παιδιά) και 2 φωλιές (φύλα, αγόρι ή κορίτσι), δεδομένου ότι $23=2\cdot 11+1$ λαμβάνουμε ότι υπάρχει φωλιά (φύλο) με $11+1=12$ παιδιά. Επίσης, αφού αποδείξαμε ότι η πρόταση ικανοποιείται για το ελάχιστο πλήθος περιστεριών (παιδιών), θα ισχύει και για οποιοδήποτε μεγαλύτερο πλήθος περιστεριών (παιδιών).

Όπως ήδη αναφέραμε και η Θεωρία Συνόλων είναι μέρος των Διακριτών Μαθηματικών. Κάθε σύνολο αποτελούμενο από 18 τουλάχιστον στοιχεία, χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με 4 ή 7 στοιχεία;

Η απάντηση είναι καταφατική και η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει και εδώ με τη χρήση Μαθηματικής Επαγωγής. Για $n=18$, $n=19$, $n=20$,

$n=21$ η πρόταση ισχύει, αφού $18=1\cdot 4+2\cdot 7$, $19=3\cdot 4+1\cdot 7$, $20=5\cdot 4+0\cdot 7$ και $21=0\cdot 4+3\cdot 7$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν το σύνολο με n στοιχεία ($n\geq 21$) χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με 4 ή 7 στοιχεία, τότε και το σύνολο με $n+1$ στοιχεία χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα με 4 ή 7 στοιχεία, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι αν $n=4k_n+7\lambda_n$ με $k_n,\lambda_n\in\mathbb{N}$ τότε $n+1=4k_{n+1}+7\lambda_{n+1}$ με $k_{n+1},\lambda_{n+1}\in\mathbb{N}$.

Πράγματι:

$$4k_{n-3}+7\lambda_{n-3}=n-3\Rightarrow n+1=4(k_{n-3}+1)+7\lambda_{n-3}.$$

Ο διακριτός τρόπος σκέψης μπορεί να συνδυαστεί και με τις Φυσικές επιστήμες. Σε μια χημική αντίδραση γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο διατηρεί το πλήθος των ατόμων του (Crocker, 1968). Στην χημική αντίδραση

$$x_1KMnO_4+x_2H_2SO_4+x_3\,H_2O_2\rightarrow$$
$$\rightarrow x'_1\,K_2SO_4+x'_2\,MnSO_4+x'_3H_2O+x'_4O_2$$

είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των θετικών ακέραιων συντελεστών $[x_1,x_2,x_3,x'_1,x'_2,x'_3,x'_4]$, η εύρεση των οποίων είναι πρόβλημα των διοφαντικών εξισώσεων και γενικότερα της Θεωρίας Αριθμών. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση του πλήθους των ατόμων για τα στοιχεία O, Mn, K, S, H αντίστοιχα, έχουμε:

$$4x_1+4x_2+2x_3=4x'_1+4x'_2+x'_3+2x'_4,$$
$$x_1=x'_2,$$
$$x_1=2x'_1,$$
$$x_2=x'_1+x'_2,$$
$$2x_2+2x_3=2x'_3.$$

Δουλεύοντας με τις εξισώσεις καταλήγουμε σχετικά εύκολα στη διοφαντική εξίσωση

$$5x_1+2x_3-4x'_4=0.$$

Μια λύση της είναι η τριάδα θετικών ακεραίων

$$[x_1,x_3,x'_4]=[2,1,3],$$

άρα προκύπτει άμεσα ότι:

$$[x_1,x_2,x_3,x'_1,x'_2,x'_3,x'_4]=[2,3,1,1,2,4,3].$$

Τότε η χημική αντίδραση γράφεται

$$2KMnO_4+3H_2SO_4+H_2O_2\rightarrow K_2SO_4+2MnSO_4+4\,H_2O+3O_2.$$

Από τη θεωρία των διοφαντικών εξισώσεων, γνωρίζουμε ότι η λύση αυτή δεν είναι μοναδική. Οι λύσεις είναι άπειρες και μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

$$S = \left\{ \left[2u, 3u, v, u, 2u, 3u+v, \frac{5u+v}{2} \right], u, v, \frac{5u+v}{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αν σκεφτούμε ότι ο αριθμός $\frac{5u+v}{2}$ είναι φυσικός όταν $u \equiv v \bmod 2$ δηλαδή ή και οι δύο περιττοί ή και οι δύο άρτιοι (αφού αν συνέβαινε το αντίθετο ο αριθμητής $5u+v$ θα ήταν περιττός και επομένως το κλάσμα $\frac{5u+v}{2}$ αποκλείεται να ήταν φυσικός). Παρατηρούμε πως αν $u = v = 1$ λαμβάνουμε την λύση που αρχικά πήραμε.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η αποκρυπτογράφηση ενός κρυπτογραφημένου κειμένου με τη βοήθεια της Στατιστικής. Αν κάποιος θέλει να αποκωδικοποιήσει ένα κείμενο μπορεί να δοκιμάσει την εξής διαδικασία (Gaines, 1956). Μετρά στο κρυπτογραφημένο κείμενο το πλήθος των γραμμάτων που εμφανίζονται και κατασκευάζει έναν πίνακα συχνοτήτων, τον οποίο συγκρίνει με τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου.

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**Ζ**	**Η**	**Θ**
12%	0,8%	2%	1,7%	8%	0,5%	2,9%	1,3%
Ι	**Κ**	**Λ**	**Μ**	**Ν**	**Ξ**	**Ο**	**Π**
7,8%	4,2%	3,3%	4,4%	7,9%	0,6%	9,8%	5,05%
Ρ	**Σ**	**Τ**	**Υ**	**Φ**	**Χ**	**Ψ**	**Ω**
5,05%	4,9%	9,1%	4,3%	1,2%	1,4%	0,2	1,6%

Συγκρίνει τα γράμματα που εμφανίζονται τις περισσότερες φορές με τα γράμματα που εμφανίζονται τις περισσότερες φορές στο ελληνικό αλφάβητο (π.χ. Α, Ο, Τ, Ε, Μ, Ν, Ι κτλ.). Είναι πολύ πιθανό να είναι και στο κρυπτογραφημένο κείμενο κάποια από αυτά. Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη τα άρθρα (ο, η, το, τα, οι, στο, στα, στη), μικρές συνηθισμένες λέξεις όπως που, πως, για, με, σε, ως κτλ. τα πιθανά τελικά γράμματα μιας λέξης μπορεί κάποιος σιγά σιγά να αποκωδικοποιήσει το κείμενο. Προφανώς αυτός ο τρόπος δεν αποκωδικοποιεί όλα τα κείμενα, αλλά προσπαθήστε να αποκωδικοποιήσετε το κείμενο:

ΜΟ ΥΨΑΧΓΘΛ ΦΨΠΜΣΝΓΨΟ ΝΨ ΗΙΛΜΣΝ ΘΒΘΓΨΛΘΟΛ ΩΟΨ ΓΧΝ ΘΟΛΨΩΙΩΧ ΓΜΣΛ ΛΘ ΦΨΔΜΟΜ ΨΝΙΓΨΓΜ ΘΦΔΨΟΗΘΣΓΟΦΜ ΟΗΤΣΥΨ. ΨΝ ΘΝΨΛ ΥΨΑΧΓΧΛ ΑΘΠΘΟ ΝΨ ΔΘΤΨΛΘΟ ΛΓΜ ΥΨΑΧΥΨΓΟΦΜ, ΛΓΜ ΚΣΛΟΦΜ, ΘΟΓΘ ΛΘ ΦΨΔΜΟΨ ΔΜΠΣΓΘΡΝΟΦΧ ΛΡΜΠΧ ΦΨΠΘΟΓΨΟ ΝΨ ΗΙΛΘΟ ΥΨΑΧΥΨΓΟΦΨ, ΚΣΛΟΦΧ, ΡΧΥΘΟΨ ΦΨΟ ΝΘΜΘΠΠΧΝΟΦΧ

ΩΠΙΛΛΨ. ΛΓΟΛ ΥΘΤΘΛ ΥΨΛ ΔΤΙΓΨ ΩΟΝΜΝΓΨΟ ΜΟ ΘΝΗΜΛΡΜΠΟΦΘΛ ΘΒΘΓΨΛΘΟΛ ΦΨΟ ΥΘΓΨ ΜΟ ΔΨΝΘΠΠΨΗΟΦΘΛ. ΘΔΘΟΗΧ Μ ΦΨΟΤΜΛ ΔΠΧΛΟΨΞΘΟ ΘΣΡΜΥΨΛΓΘ ΦΨΠΧ ΘΔΟΓΣΡΟΨ ΛΓΜΣΛ ΥΨΑΧΓΘΛ ΦΨΟ ΗΣΝΨΥΧ ΛΓΜΣΛ ΦΨΑΧΩΧΓΘΛ.

Συμπεράσματα.

Ο διακριτός τρόπος σκέψης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει θιγεί δραματικά. Έχει συνθλιβεί από τις συνεχόμενες μειώσεις της ύλης των Μαθηματικών, στερώντας από τους μαθητές τη δυνατότητα μιας πρώτης και ουσιαστικής γνωριμίας με όμορφες, κομψές και άμεσα εφαρμόσιμες μαθηματικές έννοιες. Θεωρούμε ότι αυτές οι συνεχόμενες αναίτιες μειώσεις της ύλης βλάπτουν τους μαθητές, αφού δεν τους δίνεται η δυνατότητα να σκεφτούν και να πράξουν σε έναν επιπλέον άξονα λογικής και σκέψης. Είναι απαραίτητη μια συνολική επανεξέταση της ύλης των Μαθηματικών και των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με απώτερο σκοπό την καλύτερη εκπαίδευση των εφήβων αλλά και την αναβάθμιση των Μαθηματικών.

Ενδεικτική βιβλιογραφία.

Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ. και Σβέρκος Α. (2004). *Μαθηματικά Β΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Ο.Ε.Δ.Β.

Ανδρεαδάκης Σ., Κουσέρας Ν., Μέτης Σ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (1992). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία - Πιθανότητες*, Ο.Ε.Δ.Β.

Andreescu T., Crisan V. (2017). *Mathematical Induction. A powerful and elegant method of proof*, XYZ press.

Crocker R. (1968). *Application of diophantine equations to problems in chemistry*, Journal of chemical education.

Gaines Fouche H. (1956). *Cryptanalysis*, Dover.

https://diorisimoi.moec.gov.cy/index.php/el/se-dme

http://ebooks.edu.gr/new/

Ντζιώρας Η. (1978). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου – Άλγεβρα*. Ο.Ε.Δ.Β.

Πούλος Α. (2015). *Συνδυαστική Απαρίθμηση και Συνδυαστική Γεωμετρία.* Εκδόσεις Ζήτη.