# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# $5^{ου}$ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.**

Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

**Α2.**

Ορισμός Σχολικού Βιβλίου

**Α3.**

Αφού η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα η $f$ θα είναι κυρτή, επομένως η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο με $x_0=1$ θα βρίσκεται κάτω από την $C_f$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει ότι $f(x)\geq 2x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ . Οπότε η ανισότητα $f(x)>2x-1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$. Σωστή απάντηση το β)

**Α4.** Λ , Σ , Σ , Σ , Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι $A_g=\mathbb{R}$ και $A_h=[-1,+\infty)$

Θα πρέπει $\left.\begin{array}{l} x\in A_h \\ h(x)\in A_g \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq -1 \\ h(x)\in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\geq -1$

Για $x\geq -1$, έχουμε:

$$f(x)=g(h(x))=e^{\sqrt{x+1}}$$

**Β2.**

Για $x>-1$, έχουμε:

$$F'(x)=\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}}{2}-\frac{\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}+\frac{\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}}{2}$$

Θα πρέπει $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow \frac{\alpha\cdot e^{\sqrt{x+1}}}{2}=e^{\sqrt{x+1}}\overset{e^{\sqrt{x+1}}\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=2$

Για $a=2$, είναι $F\left(x\right)=2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)$

Εξετάζουμε αν και στο $x_0=-1$ η $F$ είναι αρχική της $f$

Είναι:

$$F'\left(-1\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)-2}{\sqrt{x+1}^2}$$

$$\underset{x\to-1^+,y\to0^+}{\overset{\sqrt{x+1}=y}{=}}\lim_{y\to0^+}\frac{2e^{y}\left(y-1\right)-2}{y^2}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{y\to0^+}\frac{2ye^{y}}{2y}=\lim_{y\to0^+}e^{y}=1=f\left(-1\right)$$

Άρα για $a=2$ η $F$ είναι αρχική της συνάρτησης $f$ για κάθε $x\geq-1$

**B3.**

**Α τρόπος**

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}f\left(x\right)dx=\left[F\left(x\right)\right]_{-1}^{0}=F(0)-F(-1)=2$$

**Β τρόπος**

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{\sqrt{x+1}}dx$$

Θέτουμε $\sqrt{x+1}=u\Leftrightarrow x+1=u^2$ , άρα $dx=2udu$

Για $x=-1,u=0$ και για $x=0,u=1$

Οπότε $\mathrm{I}=\int_0^1 2ue^{u}du=2\left[ue^{u}\right]_0^1-2\int_0^1 e^{u}du=2e-2\left[e^{u}\right]_0^1=2$

**B4.** Για $x>-1$, έχουμε:

$f'\left(x\right)=e^{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ για κάθε $x>-1$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=-1$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-1,+\infty\right)$

Οπότε η $f$ είναι 1-1 συνάρτηση, επομένως αντιστρέφεται.

Είναι:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{\sqrt{x+1}}\overset{y>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x+1}=\ln y\overset{y\geq-1}{\Leftrightarrow}x=\ln^2 y-1\Leftrightarrow f^{-1}\left(y\right)=\ln^2 y-1$$

Άρα

$f^{-1}\left(x\right)=\ln^2 x-1,x\geq-1$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

Για $x>0$ είναι $e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$ , άρα $\frac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $x<0$ είναι $e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$ , άρα $\frac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=1>0$

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα

**Γ2.**

**α)** Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f''(0)=\frac{1}{2}$

**β)** Για $x\neq 0$ είναι $f''(x)=\frac{\left(e^x-1\right)'x-\left(e^x-1\right)(x)'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x-e^x+1, x\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | ↘ | | ↗ |

Παρατηρούμε ότι η $g$ παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο, άρα θα ισχύει ότι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

Οπότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$

Επιπλέον $f''(0)=\frac{1}{2}>0$ , επομένως $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , δηλαδή η $f$ είναι κυρτή συνάρτηση.

**Γ3.**

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ , δηλαδή $y=(e-1)x+1$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ , την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ και την ευθεία $x=0$ είναι: $\mathrm{E}=\int_0^1\left|f(x)-(e-1)x-1\right|dx$

Όμως δείξαμε ότι η $f$ είναι κυρτή, άρα η $C_f$ θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο Μ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή θα ισχύει $f(x)\geq(e-1)x+1$

Άρα

$$\mathrm{E}=\int_0^1\left(f(x)-(e-1)x-1\right)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\left((e-1)x+1\right)dx=$$

$$\int_0^1 x'f(x)dx-\left[(e-1)\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx-\left((e-1)\frac{1}{2}+1\right)=$$

$$f(1)-\int_0^1\left(e^x-1\right)dx-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=e-\left[e^x-x\right]_0^1-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}-(e-1-1)=\frac{3-e}{2}\ \text{τ.μ.}$$

**Γ4.**

Από Γ3. έχουμε ότι: $f(x)\geq(e-1)x+1$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((e-1)x+1\right)=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Επίσης:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(f(x)+1\right)}{x^2+2017}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1+xf'(x)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1+e^x-1}{2x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+e^x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-1}{x}+e^x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1+xe^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+xe^x}{2}=+\infty$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Θέτουμε $\int_0^3 f(t)dt = \kappa$, οπότε η αρχική σχέση για $x>0$ γίνεται:

$$xf'(x)-f(x)=\frac{1}{9}\kappa x^2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{9}\kappa \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{9}\kappa x\right)'$$

Με εφαρμογή του Πορίσματος των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{9}\kappa x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Για $x=1$ προκύπτει ότι $f(1)=\frac{1}{9}\kappa+c \Leftrightarrow 1=\frac{1}{9}\kappa+c \Leftrightarrow c=1-\frac{1}{9}\kappa$

Επομένως $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{9}\kappa x+1-\frac{1}{9}\kappa \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{9}\kappa x^2+\left(1-\frac{1}{9}\kappa\right)x$ (1)

Οπότε

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(\frac{1}{9}\kappa x^2+\left(1-\frac{1}{9}\kappa\right)x\right)dx \Leftrightarrow \kappa=\frac{1}{9}\kappa\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+\left[\left(1-\frac{1}{9}\kappa\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^3 \Leftrightarrow$$

$$\kappa=\frac{1}{9}\kappa\cdot 9+\left(1-\frac{1}{9}\kappa\right)\frac{9}{2} \Leftrightarrow \kappa=\kappa+\frac{9}{2}-\frac{\kappa}{2} \Leftrightarrow \kappa=9$$

Άρα $\int_0^3 f(t)dt=9$

Από (1) προκύπτει ότι $f(x)=x^2, x>0$

Για $x=0$ , επειδή η $f$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, θα ισχύει ότι:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

Άρα $f(x)=x^2, x\geq 0$

**Δ2.**

**α)** Για $x>0$ έχουμε:

$$g'(x) = -2\ln x \cdot (\ln x)' = \frac{-2\ln x}{x} \text{ και } g''(x) = \frac{-2\frac{1}{x}x + 2\ln x}{x^2} = 2\frac{\ln x - 1}{x^2}$$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας:

| $x$ | $0$ | e | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | $\frown$ | | $\smile$ |

Οπότε η $g$ είναι κοίλη στο $(0,e]$ και κυρτή στο $[e,+\infty)$, ενώ το $\mathrm{A}(e,-1)$ είναι σημείο καμπής της

**β)** Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $g$ στο διάστημα $[e,x]$

- Η $g$ είναι συνεχής στο $[e,x]$
- Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(e,x)$

Άρα θα υπάρχει $\xi \in (e,x)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \frac{-\ln^2 x + 1}{x-e} = -\frac{\ln^2 x - 1}{x-e} \quad (1)$$

Είναι

$$\xi < x \overset{g'\nearrow[e,+\infty)}{\Leftrightarrow} g'(\xi) < g'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{\ln^2 x - 1}{x-e} < -\frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x-e} > \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$x(\ln^2 x - 1) > 2(x-e)\ln x$ , για κάθε $x > e$

**Δ3.**

Αφού $\mathrm{A} \in C_f$ θα είναι $\mathrm{A}(x_0, x_0^2)$ και αφού $\mathrm{B} \in C_g$ θα είναι $B(x_0, -\ln^2 x_0)$, εφόσον γνωρίζουμε ότι τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη $x_0$.

Η απόσταση των Α,Β είναι:

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (x_0^2 + \ln^2 x_0)^2} = |x_0^2 + \ln^2 x_0| = x_0^2 + \ln^2 x_0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^2+\ln^2 x, x>0$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε η $h$ να παρουσιάζει ελάχιστο.

Είναι $h'(x)=2x+2\frac{\ln x}{x}$

● Η $h'$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$

● $h'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}+2\frac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}=\frac{2}{e}-2e<0$

$h'(1)=2+2\frac{\ln 1}{1}=2>0$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$

Επιπλέον $h''(x)=2+2\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{2x^2+2-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ (αφού τότε $\ln x<0\Leftrightarrow -\ln x>0\Leftrightarrow 2x^2+2-\ln x>0$), άρα η συνάρτηση $h'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$, επομένως το $x_0$ είναι μοναδικό.

Για $\frac{1}{e}<x<x_0\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(x)<h'(x_0)\Leftrightarrow h'(x)<0$

Για $x_0<x<1\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(x)>h'(x_0)\Leftrightarrow h'(x)>0$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

| $x$ | 1/e | $x_0$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | - | 0 | + |
| $h(x)$ | ↘ | | ↗ |

Οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε η απόσταση των σημείων Α και Β να γίνεται ελάχιστη.

**Δ4.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^\nu}\cdot x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\underset{x\to+\infty,y\to0}{\overset{\frac{1}{x^2}=y}{=}}\lim\limits_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$

Επίσης για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^\nu}\right)$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\nu<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^\nu}\right)=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=+\infty$

- Αν $\nu=2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^\nu}\right)=1$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=1$

- Αν $\nu>2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^\nu}\right)=0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x^\nu}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=0$