

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Ν. Χίου
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = \sigma \nu x$.

Μονάδες 9

A.2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 6

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ΑΡΧΗ 2ης ΣΕΛΙΔΑΣ

- α. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $z \cdot \bar{z} \geq 0$.
Μονάδες 2
- β. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Δ .
Μονάδες 2
- γ. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
Μονάδες 2
- δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Μονάδες 2
- ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει
$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \geq 0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = f(\alpha) + \alpha i$ και $w = f(\beta) + \beta i$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Έστω ότι $\frac{w}{z} = \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

ΤΕΛΟΣ 2ης ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ης ΣΕΛΙΔΑΣ

A. $|w + 4iz| = |w - 4iz|.$

Μονάδες 7

B. $w\bar{z} = z\bar{w}.$

Μονάδες 5

Γ. $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$

Μονάδες 6

Δ. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το $(0,0)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

A. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

Μονάδες 6

B. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1

έχει εξίσωση $y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$

Μονάδες 5

Γ.. Να αποδειχθεί ότι $\int_1^2 f(x) dx \geq \frac{2}{e}$

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ης ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ης ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ.. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ και $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = t$, $t > 1$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 1 - \frac{1}{e}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{2x} - 1 - x \int_0^1 f(t+x) dt \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

A. $\int_0^1 f(t) dt = 2$.

Μονάδες 10

B. Η εξίσωση $\int_0^x f(t) dt = 1$ έχει λύση ξ στο $(0, 1)$.

Μονάδες 8

Γ. Η εξίσωση $\int_0^x f(t) dt + x \cdot f(x) - 1 = 0$ έχει λύση στο $(0, \xi)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

ΤΕΛΟΣ 4ης ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 5ης ΣΕΛΙΔΑΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ης ΣΕΛΙΔΑΣ