ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ :3

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε διάστημα [α , β] και G είναι μία παράγουσα της f στο [α , β] , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 10

Β. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat .

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος**

α) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς σε διάστημα [α , β] και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ τότε κατ' ανάγκη f = g .

β) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $\bar{z} - z = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i$

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει πάντα : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της , τότε η εξίσωση f(x) = 0 έχει πάντα μία ακριβώς ρίζα

ε) Αν μια συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα (α , β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό , είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$, $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$. Θεωρούμε και το μιγαδικό w για τον οποίο ισχύει $w = \dfrac{2 \cdot z_1 \cdot z_2}{z_1^2 + z_2^2}$.

α) Να δείξετε ότι $\overline{z_1} = \dfrac{4}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{4}{z_2}$ Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι ο w είναι πραγματικός Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι ισχύει $\left|\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}\right| \leq 2$ Μονάδες 6

δ) Αν $w = 2$, να δείξετε ότι

(i) $|z_2 - z_1| = 2$ Μονάδες 5

(ii) το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0, z_1, z_2$ είναι ισόπλευρο Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(e) = e^2$ και $x \cdot f'(x) - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $x > 0$. Μονάδες 6

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες. Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{2010}{x^2}}$ Μονάδες 6

δ) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $z \cdot \bar{z} \cdot \ln|z| = 1$, να δείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho > 1$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x)=1+\int_{x}^{2x} f(t-x)dt$ για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x}$ Μονάδες 5

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $h(x)=\int_{1}^{x} f(t^2)dt$, τον $x'x$ και τον $y'y$. Μονάδες 7

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{x}^{x+2} f(t^2)dt$, $x \in R$.

❶ Να δείξετε ότι η g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (- 2 , 0) Μονάδες 6

❷ Να αιτιολογήσετε ότι είναι $g(x)>0$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln g(x)}{x^2}$ Μονάδες 7

d. Να δείξετε ότι

❶ $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ ❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x^2} h(x)\right) = 0$

e. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της h που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.