

## Επίλυση προβλημάτων με χρωματισμό

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης

Ηράκλειο Κρήτης

[asygelakis@gmail.com](mailto:asygelakis@gmail.com)

### Περίληψη

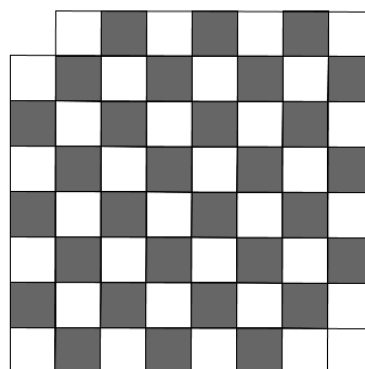
Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να συγκεντρώσει προβλήματα των οποίων η λύση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια χρωματισμού. Πολλά από αυτά είναι προβλήματα κάλυψης του αρχικού σχήματος με πολυόμινα και ο χρωματισμός του, συνήθως βοηθάει στο να απαντήσουμε ότι τέτοια κάλυψη δεν είναι εφικτή. Ωστόσο σε μερικές περιπτώσεις ο χρωματισμός δίνει θετική απάντηση με απρόσμενο τρόπο.

Η αφορμή συγγραφής αυτού του άρθρου ήταν ένα πρόβλημα, το οποίο τέθηκε στο μεταπτυχιακό μάθημα «Θεωρία Αριθμών» στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το ακαδημαϊκό έτος 2005-2006 απ' τον καθηγητή Νικόλαο Τζανάκη:

*«Εάν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωριστεί σε μικρότερα με πλευρές παράλληλες στη βάση του αρχικού και με την ιδιότητα ότι κάθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον μία πλευρά της οποίας το μήκος είναι ακέραιος αριθμός, τότε η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο»*

Η εκφώνηση του προβλήματος ήταν τέτοια που οποιαδήποτε απ' τις γνωστές σε μένα στρατηγικές επίλυσης προβλήματος αποτύγχανε να το αντιμετωπίσει. Η εκφώνηση του προβλήματος μου θύμιζε έντονα από την αρχή ένα άλλο πρόβλημα: «Εάν από μία σκακιέρα  $8 \times 8$  αφαιρέσουμε δύο γωνιακά τετράγωνα που βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο, να εξετάσετε εάν μπορούμε να την πλακοστρώσουμε με ορθογώνια διαστάσεων  $2 \times 1$  (ντόμινο) χωρίς να υπάρχουν επικαλύψεις»<sup>1</sup>.

Για τη λύση του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποιούμε συνηθισμένο χρωματισμό λευκό – μαύρο των τετραγώνων μίας σκακιέρας<sup>2</sup>. Επειδή τα τετράγωνα που αφαιρούμε έχουν το ίδιο χρώμα, έστω μαύρο όπως στο διπλανό σχήμα, συνολικά στο τέλος υπάρχουν 62 τετράγωνα εκ των οποίων 32 είναι λευκά και 30 είναι μαύρα. Αν υποθέσουμε όμως, ότι η πλακόστρωση της σκακιέρας με ντόμινο είναι εφικτή, τότε λόγω του ότι κάθε ντόμινο καταλαμβάνει ένα λευκό και ένα μαύρο τετράγωνο, πρέπει μετά την



<sup>1</sup> Στο εξής όταν γράφουμε «πλακόστρωση» ή «κάλυψη» ορθογωνίου με οποιοδήποτε σχήμα, θα εννοούμε ότι αυτή γίνεται χωρίς επικαλύψεις.

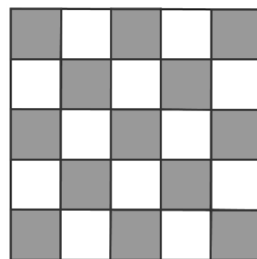
<sup>2</sup> Στο εξής όταν γράφουμε για το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας θα εννοούμε το μαύρο – λευκό και αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

πλακόστρωση να έχουμε ίδιο αριθμό λευκών και μαύρων τετραγώνων, άτοπο<sup>3</sup>.

Με τον παραπάνω τρόπο επίλυσης, παρατηρούμε ότι αποδεικνύουμε το αδύνατο του προβλήματος. Ωστόσο, στο αρχικό πρόβλημα αναζητούμε απόδειξη για την αλήθεια του συμπεράσματος. Συνεπώς, η χρήση χρωματισμού για το αρχικό πρόβλημα δε φαινόταν να είναι διαδικασία, η οποία θα κατέληγε λύση. Παρά ταύτα μετά από αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες βρήκα μία λύση με τη βοήθεια χρωματισμού, η οποία, όπως με ενημέρωσε ο κ. Μιχάλης Λάμπρου<sup>4</sup>, ήταν όμοια με μία από τις 14 λύσεις που υπήρχαν σε ένα σχετικό άρθρο του S. Wagon στο American Mathematical Monthly (βλέπε [10]).

**Πρόβλημα 1<sup>5</sup>:** 25 ζηλιάρηδες γείτονες ζουν στα τετραγωνικά (μοναδιαία) διαμερίσματα ενός  $5 \times 5$  τετραγωνικού πλέγματος. Καθένας από αυτούς νομίζει ότι, κάθε γείτονας του, που συνορεύει μαζί του οριζοντίως ή καθέτως, ζει σε καλύτερο διαμέρισμα από αυτόν. Είναι δυνατόν όλοι τους να μετακομίσουν με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένας να καταλήξει σε κάποιο από τα ζηλευτά διαμερίσματα ενός πρώην γείτονά του;

**Λύση:** Χρωματίζουμε το πλέγμα με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιάρας όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε έχουμε 13 μαύρα και 12 λευκά τετράγωνα συνεπώς κάθε γείτονας μετά τη μετακόμιση θα βρεθεί από διαμέρισμα που είναι χρωματισμένο μαύρο σε διαμέρισμα που είναι χρωματισμένο λευκό. Όμως μία τέτοια μετακόμιση όλων, δεν είναι δυνατή καθώς δεν υπάρχουν 13 λευκά διαμερίσματα.<sup>6</sup> ■



**Πρόβλημα 2:** Μπορεί ένα άλογο να ξεκινήσει από το κάτω αριστερά τετράγωνο μιας  $8 \times 8$  σκακιάρας και να καταλήξει στο πάνω δεξιά περνώντας από όλα τα τετράγωνα ακριβώς μία φορά;

**Λύση:** Όχι δε μπορεί. Αν χρησιμοποιήσουμε το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιάρας, τότε το άλογο σε κάθε κίνηση μετακινείται από τετράγωνο ενός χρώματος σε τετράγωνο του αντίθετου χρώματος. Πρέπει όμως, να κάνει 63 κινήσεις για να περάσει από όλα τα ορθογώνια άρα θα πρέπει να καταλήξει σε τετράγωνο αντίθετου χρώματος από το τετράγωνο εκκίνησης, άτοπο διότι το τετράγωνο από το οποίο ξεκίνησε και εκείνο στο οποίο θα τερματίσει έχουν το ίδιο χρώμα. ■

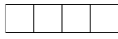

<sup>3</sup> Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται για πρώτη φορά στο βιβλίο *Critical Thinking* του φιλοσόφου Max Black [1] καθώς επίσης στο άρθρο [5] του S. Golomb αλλά και μεταγενέστερα σε αρκετά άρθρα και βιβλία. Η ίδια απόδειξη για την αδυναμία κάλυψης λειτουργεί αν αφαιρέσουμε δύο οποιαδήποτε τετράγωνα ίδιου χρώματος από τη σκακιάρα. Ο Ralph Gomory στο βιβλίο [7] του R. Honsberger έδειξε ότι αν από τη σκακιάρα  $8 \times 8$  αφαιρέσουμε δύο οποιαδήποτε τετράγωνα αντίθετου χρώματος τότε μπορούμε πάντοτε να την καλύψουμε με 31 ντόμινο.

<sup>4</sup> Καθηγητής στο Τμήμα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κρήτης.

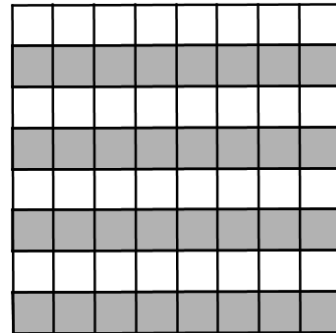
<sup>5</sup> Για το πρόβλημα αυτό με ενημέρωσε ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος και έχει τεθεί και συζητηθεί και στο forum mathematica.gr <http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=42546>.

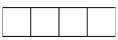
<sup>6</sup> Η λύση αυτή οφείλεται στην Evgenia Malinnikova (April 1974- ) χρυσή ολυμπιονίκης τρεις φορές στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΔΜΟ) 1989 – 1991 χάνοντας συνολικά και στις τρεις μόνο 1 βαθμό στην πρώτη συμμετοχή της στη ΔΜΟ το 1989.

**Πόρισμα:** Εάν το άλογο ξεκινήσει από το κάτω αριστερά τετράγωνο μιας σκακιέρας  $8 \times 8$  και καταλήξει στο πάνω δεξιά περνώντας από όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο από το οποίο περνάει δύο φορές και σίγουρα θα πρέπει να κάνει άρτιου πλήθους κινήσεις. ■

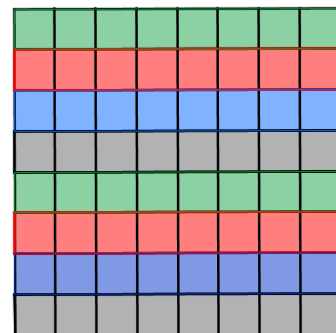
**Πρόβλημα 3:** Να δείξετε ότι μία σκακιέρα  $8 \times 8$  δε μπορεί να καλυφθεί (χωρίς επικαλύψεις) με 15 τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$   και ένα τετρόμινο της μορφής .



**Λύση:** Χρωματίζουμε, όπως στο σχήμα κάθε περιττή σειρά (ξεκινώντας από κάτω) της σκακιέρας με μαύρο χρώμα και κάθε άρτια με λευκό. Τότε κάθε  $1 \times 4$  τετρόμινο καταλαμβάνει πάντα άρτιο αριθμό λευκών ορθογωνίων, ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα τοποθετηθεί. Το μοναδικό διαφορετικό τετρόμινο καταλαμβάνει περιττό αριθμό από λευκά τετράγωνα. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι αν ήταν δυνατή η κάλυψη της σκακιέρας τότε ο συνολικός αριθμός λευκών τετραγώνων θα ήταν περιττός, άτοπο αφού είναι 32. ■



**Πρόβλημα 4:** Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο πλέγμα διαστάσεων  $102 \times 102$  δε μπορεί να καλυφθεί χωρίς επικαλύψεις με τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$  .

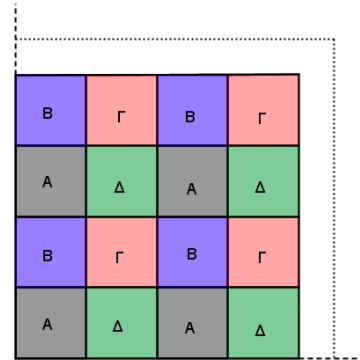
**Λύση:** Χρωματίζουμε την πρώτη σειρά με το χρώμα Α, τη δεύτερη με το χρώμα Β, την τρίτη με το χρώμα Γ, την τέταρτη με το χρώμα Δ και αρχίζουμε από την αρχή. Επειδή  $102 = 4 \cdot 25 + 2$ , άρα υπάρχουν από 26 σειρές χρωματισμένες με το χρώμα Α και το χρώμα Β και από 25 σειρές χρωματισμένες με το χρώμα Γ και το χρώμα Δ. Επομένως, υπάρχουν 2652 τετράγωνα χρωματισμένα με το χρώμα Α, 2652 τετράγωνα χρωματισμένα με το χρώμα Β, 2550 τετράγωνα χρωματισμένα με το χρώμα Γ και 2550 τετράγωνα χρωματισμένα με το χρώμα Δ. Κάθε τετρόμινο καλύπτει είτε 4 τετράγωνα ίδιου χρώματος είτε 4 τετράγωνα χρωματισμένα με 4 διαφορετικά χρώματα. Συνεπώς αν τέτοια κάλυψη ήταν δυνατή, η διαφορά του πλήθους των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α από το πλήθος των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Γ πρέπει να είναι αριθμός διαιρετός από το 4. Όμως η διαφορά του πλήθους των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Γ από το πλήθος των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α είναι 102, αριθμός που δεν είναι διαιρετός από το 4. ■



**Πρόβλημα 5:** Ένα ορθογώνιο πλέγμα διαστάσεων  $m \times n$  είναι καλυμμένο με τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$   και τετρόμινο διαστάσεων  $2 \times 2$  . Από το ορθογώνιο αφαιρέθηκαν όλα τα τετρόμινο αλλά, ένα τετρόμινο διαστάσεων  $2 \times 2$  χάθηκε και

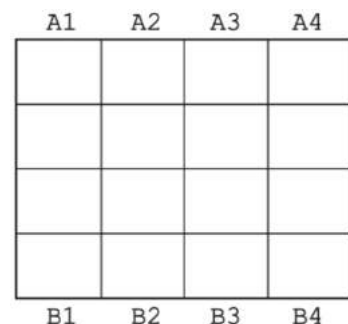
αντικαταστάθηκε από ένα άλλο τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$ . Είναι δυνατόν πλέον να καλυφθεί το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από τα τετρόμινα;

**Λύση:** Χρησιμοποιούμε το χρωματισμό του διπλανού σχήματος με 4 χρώματα ξεκινώντας το χρωματισμό από το κάτω αριστερά τετράγωνο του ορθογώνιου. Τότε κάθε τετρόμινο διαστάσεων  $2 \times 2$  καλύπτει ακριβώς ένα τετράγωνο που είναι χρωματισμένο με το χρώμα Α και κάθε τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$  είτε δεν καλύπτει κανένα είτε καλύπτει δύο τετράγωνα με το χρώμα Α. Συνεπώς ο αριθμός των τετρόμινο διαστάσεων  $2 \times 2$  συμπίπτει με τον αριθμό των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α. Όταν όμως χάνεται το τετρόμινο διαστάσεων  $2 \times 2$  μένει κενό ένα τετράγωνο που είναι χρωματισμένο με το χρώμα Α και με το τετρόμινο διαστάσεων  $1 \times 4$  που προστίθεται, δεν είναι δυνατή η κάλυψη όλων των τετραγώνων που είναι χρωματισμένα με το χρώμα Α. ■



**Παρατήρηση:** Τα παραπάνω είναι προβλήματα τα οποία λύνονται με χρωματισμό αλλά ο χρωματισμός χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί το αδύνατο της εκφώνησης του προβλήματος. Παρακάτω θα δούμε μερικά προβλήματα στα οποία ο χρωματισμός βοηθάει για να απαντήσουμε θετικά.

**Πρόβλημα 6:** Ένα μουσείο διαθέτει έναν εκθεσιακό χώρο που αποτελείται από 16 δωμάτια. Η κάτοψη του φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μεταξύ κάθε ζεύγους οριζόντιων ή κατακόρυφων δωματίων που είναι διπλανά, υπάρχει μία πόρτα. Επιπλέον, κάθε δωμάτιο στη βόρεια και νότια πλευρά του κτιρίου (οι άνω και κάτω γραμμές της κάτοψης), έχει μια πόρτα που οδηγεί έξω από τον εκθεσιακό χώρο. Κατά το σχεδιασμό μιας νέας έκθεσης, ο φύλακας πρέπει να αποφασίσει ποιες πόρτες πρέπει να είναι ανοιχτές, έτσι ώστε οι επισκέπτες να εισέλθουν στην έκθεση μέσα από μια πόρτα που βρίσκεται στη βόρεια πλευρά, να επισκεφτούν κάθε δωμάτιο ακριβώς μια φορά και να βγουν έξω από μια πόρτα στη νότια πλευρά. Φυσικά, ο φύλακας θέλει επίσης να έχει όσο το δυνατόν λιγότερες πόρτες ανοιχτές.



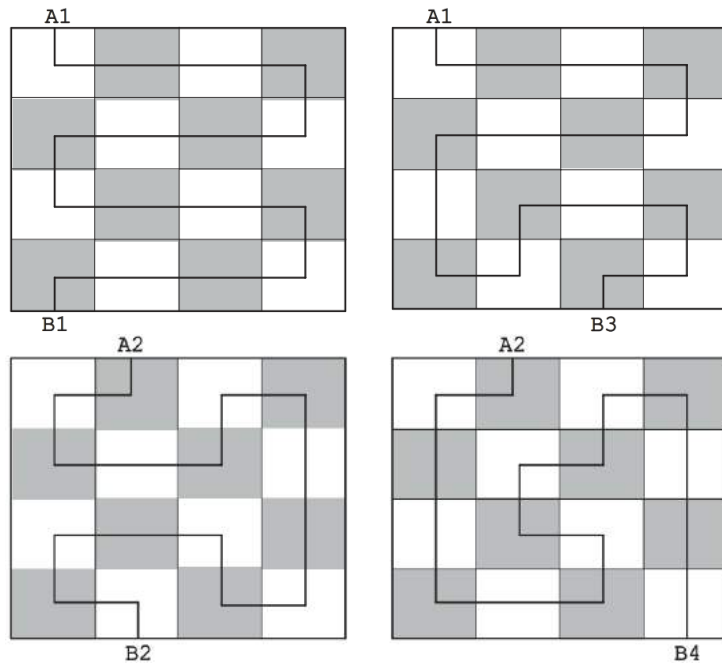
(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των θυρών που θα πρέπει να είναι ανοικτές για την έκθεση;

(β) Ποιες πόρτες εισόδου στην έκθεση και εξόδου από αυτή πρέπει να είναι ανοικτές; (Να αναφέρετε όλα τα ζευγάρια θυρών εισόδου-εξόδου που μπορεί να είναι ανοικτές για την έκθεση).

**Λύση:** (α) Από ένα μονοπάτι μέσα από την έκθεση οι επισκέπτες θα επισκέπτονται κάθε δωμάτιο ακριβώς μια φορά και θα πρέπει να εισέρχονται σε κάθε δωμάτιο και να εξέρχονται από αυτό μέσω διαφορετικών θυρών. Αυτό σημαίνει, ότι τουλάχιστον 17

πόρτες πρέπει να είναι ανοικτές, μεταξύ των οποίων μία πόρτα εισόδου και μία πόρτα εξόδου.

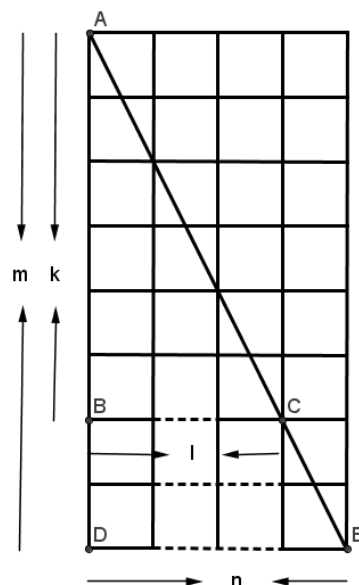
**(β)** Χρωματίζουμε κάθε τετράγωνο με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας. Γίνεται τότε φανερό ότι οποιαδήποτε διαδρομή μέσα από την έκθεση, θα πρέπει να περάσει από δωμάτιο σε δωμάτιο εναλλάσσοντας κάθε φορά χρώμα. Από το σύνολο των 16 δωματίων που θα επισκεφτεί ο επισκέπτης, το πρώτο και το τελευταίο τετράγωνο θα πρέπει να χρωματιστεί με αντίθετα χρώματα. Συνεπώς τα πιθανά ζεύγη θυρών που πρέπει να είναι ανοικτές είναι τα (A1, B1), (A1, B3), (A2, B2), (A2, B4) και συμμετρικά τα (A4, B4), (A4, B2), (A3, B3), (A3, B1). Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν μία διαδρομή για καθένα από τα τέσσερα πρώτα ζεύγη που αναφέρονται παραπάνω. ■



**Πρόβλημα 7 (α)** Να βρείτε πόσα τετράγωνα τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία η διαγώνιος ενός ορθογωνίου πλέγματος διαστάσεων  $1005 \times 1009$ ;

**(β)** Όμοια, εάν το ορθογώνιο πλέγμα είναι διαστάσεων  $120 \times 90$ .

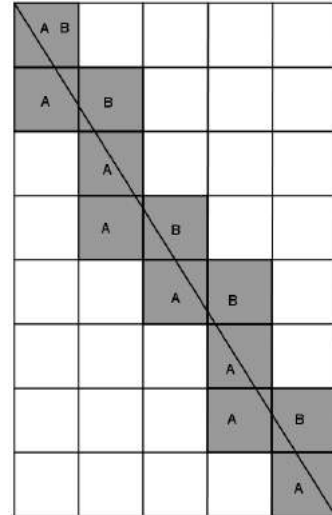
**Λύση:** Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η διαγώνιος ξεκινάει από την πάνω αριστερή γωνία του ορθογωνίου πλέγματος και καταλήγει στην κάτω δεξιά. Αρχικά παρατηρούμε, ότι εάν το πλέγμα είναι διαστάσεων  $m \times n$  με  $(m, n) = 1$  και η διαγώνιος τέμνει κάποιο τετράγωνο του ορθογωνίου, τότε το τέμνει σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του. Αυτό συμβαίνει διότι αν υποθέσουμε αντίθετα ότι τέμνει κάποιο τετράγωνο σε μία γωνία του (ας υποθέσουμε στο σημείο C του διπλανού σχήματος) και το τετράγωνο αφήνει  $k$  τετράγωνα πάνω και  $\ell$  τετράγωνα αριστερά από αυτό, τότε λόγω του ότι τα σημεία A, C, E είναι συνευθειακά, παίρνουμε την ομοιότητα των τριγώνων ABC και ADE κι έτσι  $m\ell = kn$  κι επειδή  $(m, n) = 1$  άρα  $n \mid \ell$ , άτοπο διότι  $n > \ell$ .



**(α)** Είναι  $(1005, 1009) = 1$ . Χρωματίζουμε όλα τα τετράγωνα που τέμνει η διαγώνιος μαύρα. Σε κάθε γραμμή του πλέγματος μαρκάρουμε το μαύρο τετράγωνο που βρίσκεται πιο κοντά στην αριστερή πλευρά του ορθογωνίου με το γράμμα A. Σε κάθε στήλη του πλέγματος μαρκάρουμε το μαύρο τετράγωνο που βρίσκεται πιο κοντά στην πάνω

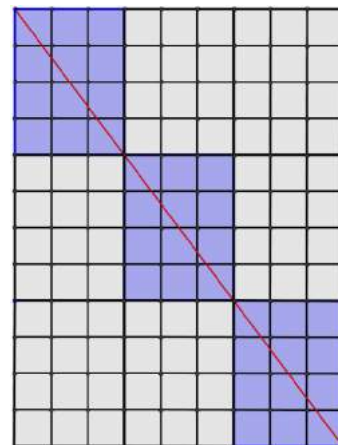
πλευρά του πλέγματος με το γράμμα Β. Στο σχήμα φαίνεται το μαρκάρισμα που θα κάναμε σε ένα πλέγμα διαστάσεων  $8 \times 5$ . Κάθε ένα από τα μαύρα τετράγωνα μαρκάρεται ακριβώς μία φορά με ένα από τα γράμματα Α ή Β εκτός από το πάνω αριστερά που μαρκάρεται και από τα δύο (\*). Συνεπώς ο αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι  $1005 + 1009 - 1 = 2013$ .

(\*) Δικαιολόγηση ισχυρισμού: Καταρχάς κάθε μαύρο τετράγωνο μαρκάρεται τουλάχιστον μία φορά διότι αν υπήρχε κάποιο μαύρο τετράγωνο που δεν μαρκάρεται με κάποιο γράμμα τότε το τετράγωνο ακριβώς από πάνω του και το τετράγωνο αμέσως αριστερά από εκείνο, θα πρέπει να είναι μαύρα, δηλαδή, θα πρέπει να τέμνονται από τη διαγώνιο. Όμως το μόνο κοινό σημείο αυτών είναι η κοινή κορυφή, άτοπο. Επίσης αν κάποιο τετράγωνο μαρκάρεται και με τα δύο γράμματα τότε δεν υπάρχει άλλο μαύρο τετράγωνο ούτε στην ίδια γραμμή και αριστερότερα από αυτό, ούτε στην ίδια στήλη και πάνω από αυτό. Αυτό σημαίνει, ότι η διαγώνιος διέρχεται από την πάνω αριστερά γωνία του τετραγώνου και αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο στο πάνω αριστερά τετράγωνο του πλέγματος.



(β) Λόγω του ότι  $(120, 90) = 30$  και  $\left(\frac{120}{30}, \frac{90}{30}\right) = (4, 3) = 1$

μπορούμε να φτιάξουμε  $30 \times 30$  blocks κάθε ένα από τα οποία, θα αποτελείται από ορθογώνια πλέγματα διαστάσεων  $4 \times 3$ . Αν φέρουμε την διαγώνιο του αρχικού πλέγματος, τότε θα περνάει από την κάτω δεξιά γωνία του πρώτου block από την πρώτη σειρά, από την κάτω δεξιά γωνία του δεύτερου block από τη δεύτερη σειρά, του τρίτου από την τρίτη σειρά κτλ., μέχρι του 30ού από την 30ή σειρά (το ότι η διαγώνιος διέρχεται από αυτές τις γωνίες είναι εύκολο να αποδειχθεί με ομοιότητα τριγώνων).



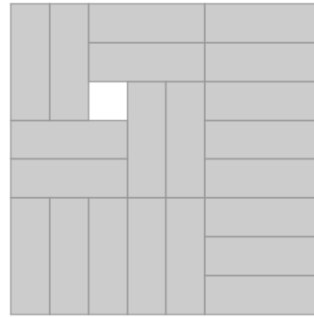
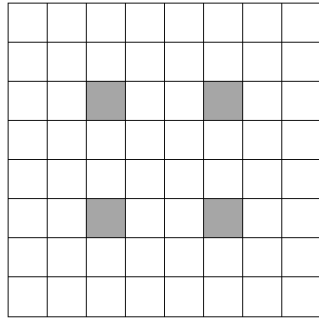
Σε κάθε block η διαγώνιος τέμνει  $4 + 3 - 1 = 6$  τετράγωνα άρα συνολικά στα 30 blocks θα τέμνει  $30 \cdot 6 = 180$  τετράγωνα. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αντίστοιχη λύση για ένα πλέγμα διαστάσεων  $12 \times 9$  ■

**Γενίκευση:** Η διαγώνιος ενός ορθογώνιου πλέγματος διαστάσεων  $m \times n$  τέμνει  $m + n - (m, n)$  τετράγωνα όπου με  $(m, n)$  συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών  $m$  και  $n$ .

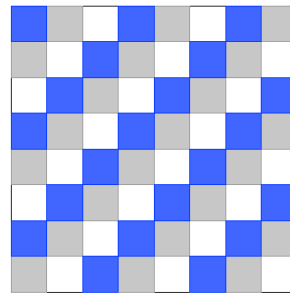
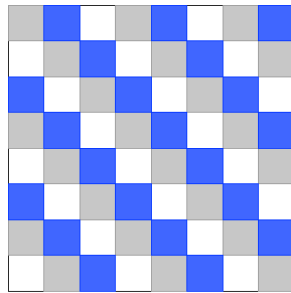
**Πρόβλημα 8:** Να βρεθεί πιο τετράγωνο πρέπει να αφαιρεθεί από μία σκακιέρα  $8 \times 8$  ώστε τα υπόλοιπα 63 τετράγωνα να μπορούν να καλυφθούν από τριόμινο  $1 \times 3$

**Λύση:** Θα αποδείξουμε ότι η σκακιέρα καλύπτεται από τριόμινο αν και μόνο αν το τετράγωνο που θα αφαιρέσουμε είναι κάποιο από τα 4 μαύρα τετράγωνα που

εικονίζονται στο κάτω αριστερά σχήμα. Μία κάλυψη με τριόμινο φαίνεται στο κάτω δεξιά σχήμα.



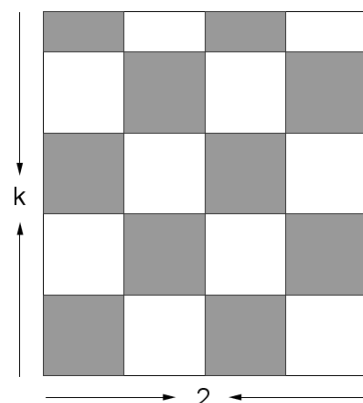
Χρησιμοποιούμε τρία χρώματα για να χρωματίσουμε τη σκακιέρα, ώστε κάθε τριόμινο που θα τοποθετηθεί οριζόντια ή κατακόρυφα να καλύπτει τρία τετράγωνα με διαφορετικό χρώμα. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό φαίνεται στο σχήμα παρακάτω. Με αυτό τον τρόπο υπάρχουν 21 λευκά τετράγωνα, 21 σκούρα τετράγωνα και 22 γκρι τετράγωνα. Συνεπώς, το τετράγωνο που θα αφαιρεθεί πρέπει να είναι γκρι.



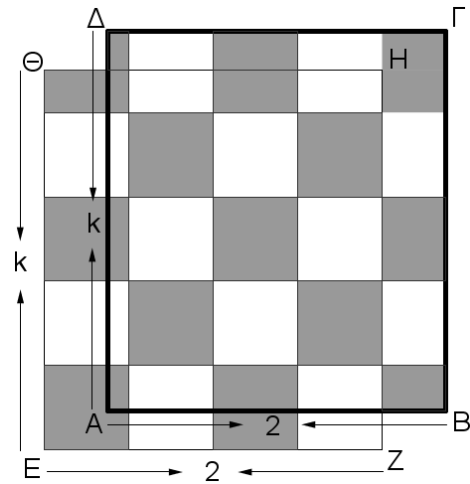
Χρωματίζουμε απ' την αρχή τη σκακιέρα με τρόπο ώστε ο καινούριος χρωματισμός να είναι ίδιος με τον προηγούμενο αν στον τελευταίο εφαρμόσουμε στροφή ως προς το κέντρο του τετραγώνου κατά  $90^\circ$  με την θετική φορά. Και πάλι το τετράγωνο που θα αφαιρεθεί πρέπει να είναι γκρι. Συγκρίνοντας τα δύο τελευταία σχήματα, τα μόνα γκρι τετράγωνα που μπορούν να αφαιρεθούν ώστε να μπορεί να γίνει η παραπάνω κάλυψη, είναι τα κοινά δηλαδή τα τέσσερα που αναφέρθηκαν στην αρχή της λύσης. ■

**Πρόβλημα 9:** Εάν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωριστεί σε μικρότερα με πλευρές παράλληλες στη βάση του αρχικού και με την ιδιότητα ότι κάθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον μία πλευρά της οποίας το μήκος είναι ακέραιος αριθμός, τότε η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**Απόδειξη:** Αν κάποιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τουλάχιστον μία πλευρά του ακέραιο αριθμό το χωρίσουμε σε τετράγωνα διαστάσεων  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία και το χρωματίσουμε όπως τη σκακιέρα, τότε η συνολική περιοχή του τετραγώνου που είναι βαμμένη με λευκό είναι ίση με τη συνολική περιοχή που είναι βαμμένη με μαύρο (ο αριθμός των μαύρων και των λευκών τετραγώνων  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  και ο αριθμός των μαύρων και λευκών ορθογωνίων διαστάσεων



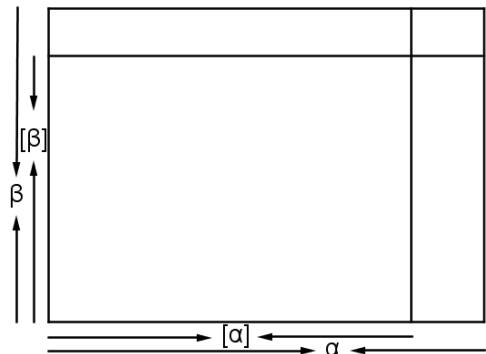
$\frac{1}{2} \times \ell$  με  $\ell < \frac{1}{2}$  που μπορεί να υπάρχουν, αν η μία διάσταση του ορθογώνιου δεν είναι ακέραιος αριθμός, είναι ίδιος). Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο διαστάσεων  $k \times 2$  όπου  $k$  τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός. Το ίδιο συμβαίνει με ένα ορθογώνιο, το οποίο το χρωματίζουμε με τον παραπάνω τρόπο, με τη διαφορά ότι ο χωρισμός του σε τετράγωνα διαστάσεων  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  δεν ξεκινά απαραίτητα από την κάτω αριστερή γωνία αλλά από οποιοδήποτε σημείο μιας πλευράς (βλέπε διπλανό σχήμα). Αυτό



συμβαίνει διότι η συγκεκριμένη περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη με κατάλληλη οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση του σχήματος. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διαστάσεων  $k \times 2$ , το οποίο εύκολα ανάγεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ με βάση τον προηγούμενο χρωματισμό.

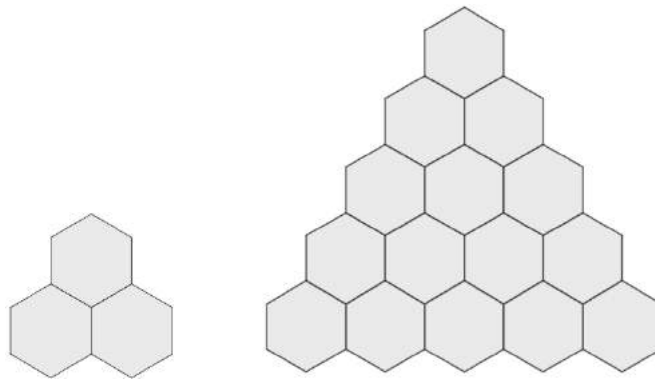
Αν ξεκινήσουμε να χρωματίζουμε το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το συνηθισμένο χρωματισμό της σκακιέρας με τετράγωνα διαστάσεων  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  ξεκινώντας από την κάτω αριστερή γωνία, τότε λόγω του ότι το κάθε μικρότερο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τουλάχιστον μία πλευρά ακέραιο αριθμό, η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό είναι ίση με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο.

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν έχει καμία πλευρά που να είναι ακέραιος αριθμός, τότε μπορούμε να το χωρίσουμε σε τέσσερα μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα από τα οποία τα τρία έχουν τουλάχιστον μία πλευρά ακέραιο αριθμό (και επομένως η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό είναι ίση με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο), ενώ στο τέταρτο



στο οποίο καμία πλευρά δεν είναι ακέραιος αριθμός, η συνολική περιοχή που είναι χρωματισμένη με λευκό δεν είναι ίση με εκείνη που είναι χρωματισμένη με μαύρο (βλέπε το σχήμα παραπάνω. Το αρχικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $\alpha \times \beta$  και το  $[\alpha]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος του  $\alpha$ ). Δηλαδή στο αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι δύο περιοχές που είναι χρωματισμένες με λευκό και μαύρο δεν είναι ισομετρικές κάτι που έρχεται σε αντίφαση με όσα δείξαμε παραπάνω. Άρα το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τουλάχιστον μία πλευρά που είναι ακέραιος αριθμός. ■

**Σχόλιο:** Ένα εύλογο ερώτημα που δημιουργείται κυρίως μετά την επίλυση προβλημάτων κάλυψης ενός πλέγματος με πολυόμινα<sup>7</sup> και τη δυνατότητα ή όχι να πραγματοποιηθεί αυτή, είναι αν όλα τα προβλήματα κάλυψης είναι δυνατόν να επιλυθούν με τη βοήθεια χρωματισμού. Η απάντηση είναι αρνητική. Αξίζει να σημειώσουμε το άρθρο του Conway<sup>8</sup> (βλέπε [2]) στην οποία αποδεικνύεται με αρκετά δύσκολη συνδυαστική θεωρία ομάδων, ότι το τρίγωνο  $T_N$ <sup>9</sup> μπορεί να καλυφθεί χρησιμοποιώντας τρίγωνα  $T_2$  αν και μόνο αν  $N \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$ . Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα τρίγωνα  $T_2$  και  $T_5$ . Το ενδιαφέρον είναι ότι στην ίδια εργασία αποδεικνύεται, ότι το παραπάνω θεώρημα δε μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια χρωματισμού.



---

<sup>7</sup> Πολυόμινο είναι το γεωμετρικό σχήμα που παράγεται αν ενώσουμε τις πλευρές ίσων τετραγώνων.

Παράδειγμα πολυομίνου αποτελεί το ντόμινο, τριόμινο, τετρόμινο κτλ.

<sup>8</sup> Για το άρθρο αυτό με ενημέρωσε ο Δημήτρης Χριστοφίδης, λέκτορας στη σχολή Computing and Mathematics του UCLAN της Κύπρου.

<sup>9</sup> Το τρίγωνο  $T_N$  αποτελείται από  $N$  σειρές με εξάγωνα ώστε η βάση του να περιέχει  $N$  εξάγωνα, η αμέσως επόμενη σειρά  $N-1$  εξάγωνα έως την 1 σειρά που περιέχει 1 εξάγωνο. Τα σχήματα  $T_5$  και  $T_2$  που φαίνονται παραπάνω είναι παραδείγματα τέτοιων τριγώνων.

## **Βιβλιογραφία**

- [1]. Black, M., *Critical thinking: an introduction to logic and scientific method*, New York Prentice-Hall (1946)
- [2]. Conway J.H., *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 53, p. 183-208 (1990)
- [3]. Engel A., *Problem – Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer (1998)
- [4]. Fomin D., Genkin S., Itenberg I., *Mathematical Circles (Russian Experience)*, Universities Press, American Mathematical Society (1996)
- [5]. Golomb S., *Checker board and polyominoes*, American Mathematical Monthly Vol. 61, No. 10, p. 675-682 (Dec., 1954)
- [6]. Golomb S., *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings*, Revised and Expanded Second Edition, Princeton University Press (1996)
- [7]. Honsberger, R., *Mathematical Gems I*, The Mathematical Association of America (1973)
- [8]. Levitin A. & M., *Algorithmic Puzzles*, Oxford University Press (2011)
- [9]. Vakil R., *A Mathematical Mosaic: Patterns and Problem Solving*, Brendan Kelly Publishing Inc. (1996)
- [10]. Wagon. S, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, American Mathematical Monthly Vol. 94, No. 7, (Aug. - Sep., 1987) p. 601-617