Θέμα 1

Α. Χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις σαν σωστή ή λάθος, σημειώνοντας στο γραπτό σας αντίστοιχα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) και να δώσετε μια σύντομη αιτιολόγηση της απάντησή σας.

1. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

2. Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι, πάντα, συνεχής.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε πάντα είναι $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) < 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = 0$.

5. Κάθε πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Μονάδες 20

Β. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf(x) \geq x - \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση.

Μονάδες 5

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 8

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2009$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Θέμα 3

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:
$f^2(x) + g^2(x) = 2xf(x) + 2g(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - x)^2 + (g(x) - x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

Μονάδες 6

Δ. Αν η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $g(x)=-2x$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική λύση.

Μονάδες 8

Θέμα 4

Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{y\cdot x}+x^2+1}\right)$, $y>0$.

i. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g.

Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

iii. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[-1,3]$ και για κάθε $\kappa,\lambda\in(0,+\infty)$, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(-1,3)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\kappa g(-1)+\lambda g(-3)=(\kappa+\lambda)g(\xi)$.

Μονάδες 5

iv. Ορίζουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 g(x) & , \quad x<0 \\ \ln(x+1) & , \quad x\geq 0 \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,4)$ ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{7}{3}\right)+f\left(\frac{13}{4}\right)}{3} .$$

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία