

Η λύση του Test

Θέμα 1

A.

1. Λάθος, γιατί για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ ορισμένη στο $[2, 4]$ έχει σύνολο τιμών το **κλειστό** διάστημα $[4, 16]$.
2. Λάθος, γιατί η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{για } x \leq 0 \\ 1 & \text{για } x > 0 \end{cases}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f(x))^2 = 1$, αλλά είναι ασυνεχής στη θέση $x_0 = 0$.
3. Σωστό, γιατί:
 - α. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής θα είναι σταθερή, άρα ο αριθμός $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \frac{2f(\alpha)}{2} = f(\alpha) = f(\beta)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
 - β. Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και γνωρίζοντας ότι ο αριθμός $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος που ορίζεται με άκρα τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ με εφαρμογή του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών έχουμε σαν συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
4. Λάθος, θα ήταν σωστό αν μας έλεγε ότι: για τη συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και (πρόσεξε) $f(\alpha) < \kappa < f(\beta)$, τότε, πάντα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \kappa$.
5. Σωστό, γιατί η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ είναι συνεχής στο $[1, 3]$ οπότε παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο διάστημα $[1, 3]$.
6. Λάθος, γιατί το σύνολο στο οποίο ορίζεται είναι το $[0, 1) \cup (1, 2]$ το οποίο δεν είναι διάστημα.
7. Λάθος γιατί η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
8. Λάθος γιατί το πεδίο ορισμού της A δεν γνωρίζουμε αν είναι διάστημα.
9. Λάθος, μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να είναι ασυνεχής.
10. Σωστό, γιατί $f^2 = f \cdot f$ και το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
11. Σωστό, γιατί η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ οπότε έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.
12. Λάθος, γιατί αφού f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ (και όχι για κάθε $x \in \mathbb{R}$) έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. Για $x_0 \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ με $\delta > 0$ πολύ μικρό θετικό αριθμό έχουμε:

- $\left| x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right| = |x^2| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \stackrel{\left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq 1}{\leq} |x^2| \cdot 1 = x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \leq x^2$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$ και επειδή $g(0) = 0$ έχουμε σαν τελικό συμπέρασμα ότι η g είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 0$.
- Για $x \neq 0$ οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$, $w(x) = \eta \mu x$ είναι συνεχείς,
η συνάρτηση $h(x) = \eta \mu \frac{1}{x}$ είναι συνεχής σαν σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f και w
και τέλος η συνάρτηση $g(x) = x^2 \eta \mu \frac{1}{x}$ είναι συνεχής σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Θέμα 2

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - 5, x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -15 + 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 5) = -15 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -15,$$

άρα υπάρχει $\alpha < 0$ με $g(\alpha) < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 + 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5,$$

άρα υπάρχει $\beta > 0$ με $g(\beta) > 0$.

Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 5$ είναι συνεχής με $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, άρα από το θεώρημα του Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 5$.

Bi. Για να ισχύει το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα $[-2, 2]$ για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta + 2 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 2\beta - \alpha & , \quad x = -1 \quad \text{πρέπει και αρκεί} \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases}$$

η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και να ισχύει $f(-2) \cdot f(2) < 0$.

A. Η συνέχεια στα εσωτερικά σημεία και ιδιαίτερα στο $x_0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} ((\alpha - 1)x + \beta + 2) = (\alpha - 1)(-1) + \beta + 2 = -\alpha + \beta + 3$$

$$f(-1) = 2\beta - \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1) \cdot (\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}-1) \cdot (\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1) \cdot (\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)} = 2.$$

Επομένως έχουμε $-\alpha + \beta + 3 = 2$ και $2\beta - \alpha = 2$ οπότε λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 3 \end{cases}, \text{ άρα η συνάρτηση έχει τύπο } f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 2 & , \quad x = -1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x \in (-2, 2)$.

B. συνέχεια στα άκρα

Στο $x_0 = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2^+} (3x + 5) = -1 = f(-2)$, άρα συνεχής στο $x_0 = -2$.

Στο $x_0 = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} \right) = \frac{3}{1} = 3 = f(2)$, άρα συνεχής στο $x_0 = 2$.

Τελικά η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και είναι $f(-2) \cdot f(2) = -3 < 0$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2, 2]$.

Bii.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 = 0 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 2 = 0 & , \quad x = -1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} = 0 & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}, \text{ δεκτή} & , \quad -2 \leq x < -1 \\ \text{αδύνατη} & , \quad x = -1 \\ x = -1, \text{ αδύνατη} & , \quad -1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ άρα } x_0 = -\frac{5}{3}.$$