Θέμα 1

A. Χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα σημειώνοντας στο γραπτό σας αντίστοιχα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

1. Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής και μη σταθερή, έχει σαν σύνολο τιμών ένα ανοικτό διάστημα.
2. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^2=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι, πάντα, συνεχής.
3. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της.
4. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και $\alpha<\kappa<\beta$, τότε, πάντα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\kappa$.
5. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ παίρνει μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο διάστημα [1,3].
6. Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ισχύει το θεώρημα ελάχιστης και μέγιστης τιμής στο διάστημα [0, 2].
7. Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x\in[-2,1) \\ x^2+2 & \text{αν} \quad x\in[1,2] \end{cases}$ είναι $f(-2)=-1$ και $f(2)=6$.

   Τότε για κάθε αριθμό η με $-1<\eta<6$, υπάρχει, πάντα, $\xi\in(-2,2)$ με $f(\xi)=\eta$.
8. Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο A και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ με $\alpha,\beta\in A$, $\alpha<\beta$, τότε υπάρχει, πάντα, ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(\xi)=0$.
9. Έστω η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ και $x_0\in\Delta$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε κατ' ανάγκη, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
10. Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0\in\Delta$, τότε και η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής στο x_0.
11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση g με $g(x)=e^{f(x)}$ έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.
12. Αν f μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta\subseteq\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Μονάδες 18

B. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$.

Μονάδες 7

Θέμα 2

A. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-10$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=10$, τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=5$.

Μονάδες 10

B. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} (\alpha-1)x+\beta+2 & , \quad -2\le x<-1 \\ 2\beta-\alpha & , \quad x=-1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} & , \quad -1<x\le 2 \end{cases}$.

i. Να προσδιορισθούν οι παράμετροι $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-2,\ 2]$.

Μονάδες 10

ii. Στη συνέχεια να βρεθούν τα $\mathbf{x_0}$ του θεωρήματος του Bolzano στο $(-2,2)$.

Μονάδες 5

Θέμα 3

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$6x - x^2 \le f(x) \le x^2 - 6x + 18.$$

i. Να αποδείξετε ότι: $|f(x)-9| \le |x-3|^2$.

Μονάδες 9

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 8

iii. Να προσδιορίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-9}{x-3} & \text{αν} \quad x \ne 3 \\ \alpha^3 + 64 & \text{αν} \quad x = 3 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 8

Θέμα 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2(\alpha x) + \eta\mu^2(5x)}{x^2} & , \quad x \ne 0 \\ \alpha^2 + 25 & , \quad x = 0 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονάδες 5

Β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ. Αν επί πλέον για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \le 10\alpha$, τότε:

i. Αποδείξετε ότι $\alpha = 5$.

Μονάδες 5

ii. Βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

iii. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 49$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\ \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης