

ΘΕΜΑ 1

A. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

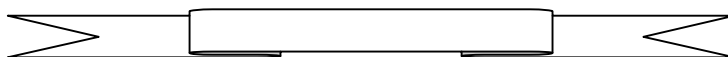
B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ

- ❶ Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$, τότε υπάρχει πάντα και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- ❷ Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$
- ❸ Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- ❹ Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x > 0 \\ x-2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής
- ❺ Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ

ΘΕΜΑ 2

A. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν)

- ❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x + 3)$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 6| + |2 - x| - 1}{x^2 - 9}$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{|x|}$
- ❹ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2007^x + 2008^x}{2009^x + 1}$
- ❺ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$
- ❻ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x)$



B. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x) - f(x)}{\sqrt{x+3} - 2} = 8$

- ❶ Να βρείτε την τιμή $f(1)$
- ❷ Να δείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot f(x) = 9 - x^2$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 3)$
- ❸ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(e) \cdot x^3 + 3x - 2)$

ΘΕΜΑ 3

A. Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - f(1) \cdot x + f(2)) = 7$$

❶ Να δείξετε ότι $f(1) = 1$, $f(2) = 6$

❷ Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f



B. Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^3(x) - x \cdot f^2(x) - x^2 \cdot f(-x) = x^2 \cdot \eta\mu x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$. Να δείξετε

❶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)}{x} = -L$

❷ $L = 1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$

❶ Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών

❷ Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x + 3^x}{4^x + 2}$

❸ Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\ln x_0) = f(-x_0)$$

❹ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους

οποίους ισχύει $f\left(\left|z - i\right| + \frac{1}{2}\right) = e - 1$

❺ Αν οι εικόνες των z_1, z_2 βρίσκονται στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο , να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z_1 - z_2| - 2) \cdot (f(x) + f(-x))$$