mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

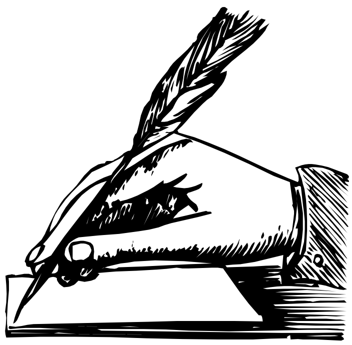
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012

Λύσεις των θεμάτων



Έκδοση 2η (28/05/2012, 11:40)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=132389

Συνεργάστηκαν οι:
Αντωνέας Στράτης, Ανδρέας Βαρβεράκης,
Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καπελλίδης,
Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κατσίπης,
Χρήστος Κυριαζής, Γρηγόρης Κωστάκος,
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος,
Χρήστος Τσιφάκης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

Α3. Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*.

Α4. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4\Leftrightarrow(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4$$
$$\Leftrightarrow|z|^2-z-\overline{z}+1+|z|^2+z+\overline{z}+1=4$$
$$\Leftrightarrow 2|z|^2=2\Leftrightarrow|z|=1.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

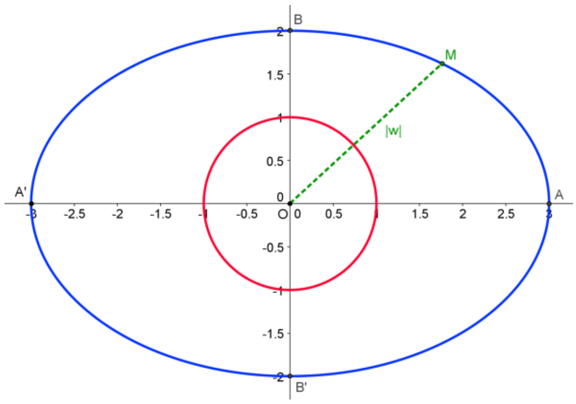
B2. Έχουμε ότι $|z_1|=|z_2|=1$. Επίσης:

$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2)=2 \Leftrightarrow Re(\overline{z}_1 z_2)=0.$

$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2)=2$. Άρα, $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

B3. Έστω $w=x+yi$, όπου $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$. Τότε $|w-5\overline{w}|=|x+yi-5(x-yi)|=|-4x+6iy|=12$ άρα ισοδύναμα παίρνουμε

$$\left|-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}i\right|=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$



Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ του μιγαδικού w είναι η προηγούμενη έλλειψη.
Οι κορυφές της έλλειψης είναι $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{A}'(-3,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{B}'(0,-2)$. Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $2a=(\mathrm{AA}')=6$ και ο μικρός άξονας $2\beta=(\mathrm{BB}')=4$.
Είναι γνωστό από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Β Λυκείου (σελίδα 104) ότι για οποιοδήποτε σημείο M της έλλειψης ισχύει ότι $\beta\le(\mathrm{MO})\le\alpha$. Άρα, $2\le|w|\le 3$. Για $w=2i$ ή $w=-2i$ έχουμε ότι $\min|w|=2$ και για $w=3$ ή $w=-3$ έχουμε ότι $\max|w|=3$.

B4. Από την τριγωνική ανισότητα $||z|-|w||\le|z+w|\le|z|+|w|$ βάζοντας όπου w το $-\mathrm{w}$ παίρνουμε την $||z|-|w||\le|z-w|\le|z|+|w|$. Άρα αφενός $|z-w|\le|z|+|w|\le 1+3=4$ και αφετέρου $|z-w|\ge||z|-|w||\overset{|x|\ge x}{\ge}|w|-|z|\ge 2-1=1$ έχουμε:

$$1=2-1\le|w|-|z|\le|w-z|\le|w|+|z|\le 3+1=4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_1(x)=x-1$ (πολυώνυμο), $f_2(x)=\ln x$ (λογαριθμική συνάρτηση).

Είναι $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x\ln x+x-1}{x}$.

Έχουμε $f'(1)=0$.

Αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0 \Rightarrow x\ln x<0$ και $x-1<0$. Επομένως $x\ln x+x-1<0$ και έτσι $f'(x)<0$ για $0<x<1$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	Ο.ε -1	↗	$+\infty$

Αν $x>1$ τότε $\ln x>0 \Rightarrow x\ln x>0$ και $x-1>0$. Επομένως $x\ln x+x-1>0$ και έτσι $f'(x)>0$ για $x>1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και συνεχής σε αυτό άρα

$f\left((0,1]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και συνεχής σε αυτό άρα

$f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$.

Οπότε τελικά το σύνολο τιμών της f είναι $[-1,+\infty)$.

Γ2. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow f(x)=2012$

Όμως επειδή $f\left((0,1]\right)=[-1,+\infty)$, η f είναι συνεχής στο $(0,1]\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=2012$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, το x_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=2012$ στο $(0,1)$.

Πιο αναλυτικά: Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-2012\right)=+\infty$ οπότε $f(x)-2012>0$ για κάθε x κοντά στο 0. Συνεπώς υπάρχει $k>0$ κοντά στο 0 (άρα $k<1$) ώστε $f(k)-2012>0$ δηλαδή $f(k)>2012$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[k,1\right]$ και $f(1)<2012<f(k)$ οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $\left[k,1\right]$ έχουμε το παραπάνω συμπέρασμα.

Όμοια αφού $f\left([1,\infty)\right)=[-1,+\infty)$, η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (η αναλυτική δικαιολόγηση είναι όμοια με την παραπάνω) υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=2012$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα το x_2 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=2012$ στο $(1,+\infty)$.

Άρα τελικά η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις x_1 και x_2.

Γ3. Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση

$f'(x)+f(x)=2012\Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=2012e^x\Leftrightarrow\left(f(x)e^x-2012e^x\right)'=0$ έχει λύση στο διάστημα (x_1,x_2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=f(x)e^x-2012e^x$, $x\in[x_1,x_2]$. Η συνάρτηση H είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ διότι προκύπτει από πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) διότι προκύπτει από πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $H'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x-2012e^x$.

Επίσης $H(x_1)=H(x_2)=0$ διότι από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $f(x_1)=f(x_2)=2012$.

Συνεπώς ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την H στο $[x_1,x_2]$. Άρα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε

$$H'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}-2012e^{x_0}=0 \overset{e^{x_0}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0)+f(x_0)=2012.$$

Γ4. Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$ άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$. Επίσης η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=-1$ άρα και της $g(x)=0$ είναι το $x=1$. Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_0^e-\int_1^e\frac{(x-1)^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2-2x+1}{x}dx$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2-2e+1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e+1-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{e^2-3}{4}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}, x\in(0,+\infty)$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι: $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, οπότε παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για $x=1$.
Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων), παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $A_g=(0,+\infty)$, οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $g'(1)=0$.

Όμως $g'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$, οπότε $g'(1)=f(1)+\frac{1}{e}$

και αφού $g'(1)=0$, έχουμε ότι $f(1)+\frac{1}{e}=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$ (1) .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε διατηρεί πρόσημο και κατά συνέπεια λόγω της (1) έχουμε ότι $f(x)<0$.

Τότε από την υπόθεση έχουμε $lnx-x=\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)$ (2)

Αφού $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, από την (2) βρίσκουμε ότι $\frac{lnx-x}{f(x)}=\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e$ (3)

Θέτουμε $G(x)=\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ [δικαιολόγηση: Η συνάρτηση με τύπο $\ln t - t$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και αφού η f είναι συνεχής στο (0, +∞) με f(t) ≠ 0, για κάθε t > 0, η συνάρτηση $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι επίσης συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ στο $(0,+\infty)$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη] με $G'(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ οπότε η (3) παίρνει τη μορφή:

$G'(x) = G(x) + e \Leftrightarrow e^{-x}G'(x) - e^{-x}G(x) = e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x}G(x) = -e^{-x+1} + c, c \in \mathbb{R}$ (4)

Για $x=1$ η (4) γίνεται: $e^{-1}G(1) = -e^{-1+1} + c \Leftrightarrow c = 1$, άρα από την (4) έχουμε:

$$e^{-x}G(x) = -e^{-x+1} + 1 \Leftrightarrow G(x) = -e^{-1} + e^x \Leftrightarrow \int_1^x \frac{lnt - t}{f(t)}dt = e^x - e^{-1} \quad (5)$$

Το πρώτο μέλος της (5) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η συνάρτηση $e^x - e^{-1}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x (εκθετική) και e^{-1} (σταθερή). Παραγωγίζοντας την (5) βρίσκουμε ότι: $\frac{lnx - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(lnx - x)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^{-x} [σύνθεση των παραγωγίσιμων e^x (εκθετική) και –x (πολυωνυμική)] και $\ln x - x$ [διαφορά των παραγωγίσιμων lnx (λογαριθμική) και –x (πολυωνυμική)].

Δ2. Για $x \in (0,1)$ έχουμε ότι: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx - x}{e^x} = -\infty$, αφού $\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$.

Τότε για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to 0^+}\left(f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right)$ θέτουμε $u = \frac{1}{f(x)}$, οπότε $u \to 0^-$, άρα για $x \in (0,1)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right) = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2}$$
$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = 0$$

αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ και δεδομένου ότι για το όριο $\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L' Hospital, αφού $\lim_{u\to 0^-}(\eta\mu u - u) = \lim_{u\to 0^-} u^2 = 0$ και υπάρχει το $\lim_{u\to 0^-}\frac{(\eta\mu u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = 0$.

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε ορίζεται η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ και είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$.

Η F' είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(lnx - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(-lnx + x + \frac{1}{x} - 1\right) \ge e^{-x}\frac{1}{x}$$

αφού $x - 1 - lnx \ge 0,\ x \in (0,+\infty)$.

Επιπλέον αφού ισχύει $e^{-x}\frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, έχουμε ότι $F''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση F είναι συνεχής στα $[x,2x],[2x,3x] \subset (0,+\infty)$ με $x > 0$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη στα $(x,2x),(2x,3x) \subset (0,+\infty)$ με $x > 0$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχουν $x_1 \in (x,2x)$, $x_2 \in (2x,3x)$ ώστε $F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$ (6) και

$$F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \quad (7).$$

Όμως $x_1 < x_2$ και η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε $F'(x_1) < F'(x_2)$ και από τις (6), (7) βρίσκουμε:

$$\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x),$$

αφού $x > 0$.

Δ4. Έχουμε ότι: $lnx \le x - 1 \Leftrightarrow lnx - x \le -1, x > 0$ και $e^{-x} > 0, x > 0$,
άρα $e^{-x}(lnx - x) < 0, x > 0$, οπότε $F'(x) = f(x) < 0, x > 0$, άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta), x \in [\beta, 2\beta] \subset (0,+\infty)$.
Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $2F$ (αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι παραγωγίσιμη) και της σταθεράς $F(\beta) + F(3\beta)$, με
$h(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$ (αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και $\beta < 3\beta$)
$h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ (από το ερώτημα Δ3),
οπότε $h(\beta)h(2\beta) < 0$, δηλαδή από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ έτσι ώστε
$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$.
Το παραπάνω ξ είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) < 0$.

ΣΧΟΛΙΑ:

Α4. Εξήγηση των προτάσεων σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:

α) **Σωστό** (σελ. 91 σχολικού βιβλίου: *«Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.»)*

β) **Σωστό** (σελ. 152 σχολικού βιβλίου: «Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.»)

γ) **Λάθος** (σελ. 178 σχολικού βιβλίου: «Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0»)

δ) **Λάθος** (σελ. 232 σχολικού βιβλίου: « $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ »)

ε) **Λάθος** (σελ. 336 σχολικού βιβλίου: « $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$,
όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$»)

Β1. Εναλλακτικά

1η Προσέγγιση: Έστω $z=x+yi$ όπου $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $|z-1|^2+|z+1|^2=|x-1+yi|^2+|x+1+yi|^2=(x-1)^2+(x+1)^2+2y^2=2x^2+2y^2+2=4$ άρα ισοδύναμα $x^2+y^2=1$ που παριστάνει κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ρ=1. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.

2η Προσέγγιση: Αν θεωρήσουμε τα σημεία $\mathrm{M(z), A(1,0), B(-1,0)}$, όπου $\mathrm{M(z)}$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z, το Α είναι η εικόνα του μιγαδικού 1 ενώ το Β είναι η εικόνα του μιγαδικού -1. Παρατηρούμε ότι η σχέση γράφεται $(\mathrm{MA})^2+(\mathrm{MB})^2=(\mathrm{AB})^2$ οπότε στο τρίγωνο ΑΜΒ ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα άρα $\mathrm{MA}\perp\mathrm{MB}$. Συνεπώς το σημείο Μ κινείται σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1.

Β2. Εναλλακτικά

1η Προσέγγιση: Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $|\mathrm{z}_1|=|\mathrm{z}_2|=1$ οπότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου $|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|^2+|\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_2|^2=2|\mathrm{z}_1|^2+2|\mathrm{z}_2|^2$ (Άσκηση 9 σχολικό βιβλίο σελίδα 101. Η σχέση αυτή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί εάν προηγουμένως δεν αποδειχθεί), έχουμε $|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=2+2\Leftrightarrow|\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2|=\sqrt{2}$.

2η Προσέγγιση: Αφού τα σημεία $A(z_1),\ B(z_2)$ είναι σημεία του προηγούμενου κύκλου και $(AB)=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ άρα η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Τότε από την Β Λυκείου είναι γνωστό ότι το απόστημα a_4 είναι το μισό της πλευράς AB και αν M το μέσον ης AB τότε $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ αρα $2|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ ή $2a_4=|z_1+z_2|$ δηλαδή $|z_1+z_2|=(AB)=\sqrt{2}$.

Β3. Εναλλακτικά

Αν P,Q εστίες της έλλειψης το $|w|$ είναι το μήκος της διαμέσου m του τριγώνου SPQ όπου S τυχαίο σημείο της έλλειψης και είναι $2\le|w|\le 3$ με $|w|=2$ όταν το S βρεθεί στο άκρο του μικρού άξονα και $|w|=3$ όταν το S βρεθεί στο άκρο του μεγάλου άξονα.

Γ1. Εναλλακτική προσέγγιση για την μονοτονία της f

- 1η Προσέγγιση: $f'(x)=lnx+\dfrac{x-1}{x}$. Είναι $f'(1)=0$ και παρατηρούμε ότι για $x>1$ ισχύει $f'(x)>0$ και για $x<1$ $f'(x)<0$.
- 2η Προσέγγιση: Είναι: $f'(x)=lnx+1-\dfrac{1}{x}, \forall x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f' είναι και αυτή παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο εν λόγω διάστημα με $f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}, \forall x>0$. Επομένως πρόκειται για κυρτή συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ δηλαδή η f ' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρώ ότι $f'(1)=ln1+1-1=0$ και για $0<x<1$ είναι: $f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ απ' όπου (λόγω της συνέχειας της συνάρτησης) προκύπτει πως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Παρόμοια αν $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$, επομένως λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Γ3. Εναλλακτική Προσέγγιση

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο:

$$h(x)=f'(x)+f(x)-2012, x\in[x_1,x_2]\Leftrightarrow h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+(x-1)\ln x-2013, x\in[x_1,x_2]$$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και:

$h(x_1)=\ln x_1+1-\dfrac{1}{x_1}+(x_1-1)\ln x_1-2013 \overset{(x_1-1)\ln x_1=2013}{=} lnx_1+1-\dfrac{1}{x_1}<0$, αφού είναι άθροισμα αρνητικών. (Είναι $0<x_1<1\Rightarrow \ln x_1<0$ και $0<x_1<1\Rightarrow \dfrac{1}{x_1}>1\Rightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-1\Rightarrow 1-\dfrac{1}{x_1}<0$)

Επιπλέον $h(x_2)=\ln x_2+1-\dfrac{1}{x_2}+(x_2-1)\ln x_2-2013 \overset{(x_2-1)\ln x_2=2013}{=} \ln x_2+1-\dfrac{1}{x_2}>0$ αφού πρόκειται για άθροισμα θετικών. (Είναι: $x_2>1\Rightarrow \ln x_2>0$ και $x_2>1\Rightarrow \dfrac{1}{x_2}<1\Rightarrow -\dfrac{1}{x_2}>-1\Rightarrow 1-\dfrac{1}{x_2}>0$)

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε $h(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

Δ1. Εναλλακτικά για το πρόσημο της f

Για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{4}} f(t)dt\geq\frac{1/4}{e}>0\Leftrightarrow -\int_{\frac{3}{4}}^{1} f(t)dt>0\Leftrightarrow \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(t)dt<0$

Όμως η f ως συνεχής και μη μηδενική διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν ήταν $f(x)>0$ τότε θα είχαμε $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} f(t)dt>0$ άτοπο άρα το πρόσημο της f είναι αρνητικό.

Εναλλακτικά για την απόδειξη της παραγωγισιμότητας της f πριν την εύρεση του τύπου της

Έστω $\alpha(x)=\ell nx-x$. Τότε $\alpha'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\alpha'(x)$			+	0	−
$\alpha(x)$			$\nearrow$		$\searrow$

Είναι $\alpha(\mathrm{x})\le\alpha(1)\Leftrightarrow\alpha(\mathrm{x})\le-1\Leftrightarrow\dfrac{\alpha(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}\ge\dfrac{-1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}>0$ συνεπώς $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}=\dfrac{\ell nx-x}{f(x)}>0$.

Επομένως για $\mathrm{x}>1$ είναι $\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt>0\Leftrightarrow\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e>e\neq0$ και για $0<\mathrm{x}<1$ $\int_x^1\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt>0\Leftrightarrow-\int_x^1\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt<0\Leftrightarrow\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e<e\neq0$.

Τέλος για $\mathrm{x}=1$ είναι $\int_1^1\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e=e\neq0$ οπότε τελικά $\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\neq0$ για κάθε $\mathrm{x}>0$.

<u>Σημείωση:</u> Το ολοκλήρωμα γίνεται μηδέν μόνο για $\mathrm{x}=1$ αφού $\dfrac{\ln x-x}{f(x)}>0$.

Άρα $f(x)=\dfrac{\ell nx-x}{\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη.

- <u>Παρατήρηση:</u> Η εκφώνηση της άσκησης προϋποθέτει την ύπαρξη συνάρτησης f που ικανοποιεί τα δεδομένα (σε αντίθεση με την εκφώνηση «Να βρεθεί η συνάρτηση f ώστε…»). Χωρίς λοιπόν να είναι απαραίτητη η επαλήθευση στη συγκεκριμένη άσκηση αν επαληθεύσουμε διαπιστώνουμε ότι πράγματι τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος υπάρχει και είναι η συνάρτηση που βρήκαμε.

$$\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)=\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{e^{-t}(lnt-t)}dt+e\right)e^{-x}(lnx-x)$$
$$=\left(\int_1^x e^t dt+e\right)e^{-x}(lnx-x)$$
$$=(e^x-e+e)e^{-x}(lnx-x)$$
$$=lnx-x$$

<u>Εναλλακτικά για την εύρεση της συνάρτησης f από τη σχέση (3)</u>

Από τη σχέση $\dfrac{lnx-x}{f(x)}=\int_1^x\dfrac{lnt-t}{f(t)}dt+e$ (3) αν ορίσουμε $\mathrm{H(x)}=\int_1^x\dfrac{\mathrm{lnt-t}}{\mathrm{f(t)}}\mathrm{dt+e}$, τότε η τελευταία γίνεται: $\mathrm{H'(x)=H(x)}$ και λόγω της εφαρμογής του σχολικού βιβλίου (σελ. 252) παίρνουμε $\mathrm{H(x)=ce^x}$ η οποία για x=1 δίνει $\mathrm{H(1)=ce}\Leftrightarrow\mathrm{e=ce}\Leftrightarrow\mathrm{c}=1$. Άρα τελικά $\mathrm{H(x)=e^x}$. Η συνάρτηση Η είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων (η αναλυτική δικαιολόγηση βρίσκεται στη λύση του Δ1 παραπάνω) και η $\mathrm{e^x}$ είναι παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση και συνεχίζοντας όπως στην λύση παραπάνω, βρίσκουμε τη συνάρτηση τον τύπο της συνάρτησης f.

Δ3. <u>Εναλλακτικά για το 2^{ο} μέρος του ερωτήματος</u>

Αφού F είναι κυρτή, η C_F βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το σημείο επαφής). Θεωρούμε την εφαπτομένη στο $2x_0 > 0$ που έχει εξίσωση $y(x) = F(2x_0) + F'(2x_0)(x - 2x_0)$ τότε είναι

$F(3x_0) > y(3x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)(3x_0 - 2x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)x_0,\ 3x_0 \neq 2x_0$ και

$F(x_0) > y(x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)(x_0 - 2x_0) = F(2x_0) - F'(2x_0)x_0,\ x_0 \neq 2x_0$.

Προσθέτοντας τις δυο προηγούμενες έχουμε $F(3x_0) + F(x_0) > 2F(2x_0)$ για κάθε $x_0 > 0$ άρα

$$\frac{F(x) + F(3x)}{2} > F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) = 2F(2x)$$