mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

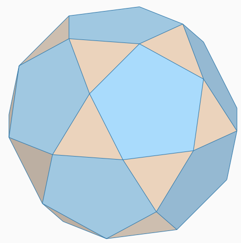
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Τετάρτη 23 Μαΐου 2012

Εκφωνήσεις
και Λύσεις
των Θεμάτων

LaTeX - έκδοση (24/5/2012, 21:00)



Οι απαντήσεις και οι λύσεις είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς των Επιμελητών του Δικτυακού Τόπου mathematica.gr με βάση υλικό που αναρτήθηκε στην Δημόσια συζήτηση του mathematica.gr

Συνεργάστηκαν:

Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καπελλίδης, Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Γρηγόρης Κωστάκος, Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Τετάρτη 23 Μαΐου 2012

ΘΕΜΑ Α. A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)\,,\ \ x\in\mathbb{R}\,.$$

μον. 7

A2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A.

μον. 4

A3. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, αν $\overline{x}>0$ και πώς, αν $\overline{x}<0$;

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων.

β. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$.

γ. Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$, τότε ισχύει ότι

$$P(A)>P(B)\,.$$

δ. Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς.

ε. $\lim\limits_{x\to x_0} ημ\,x = ημ\,x_0\,,\ \ x_0\in\mathbb{R}\,.$

μον. 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: A1. **Απόδειξη:** Έστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))\,,$

και για $h\neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)\,.$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)\,.$ □

A2. **Ορισμός:** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\,.$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας. □

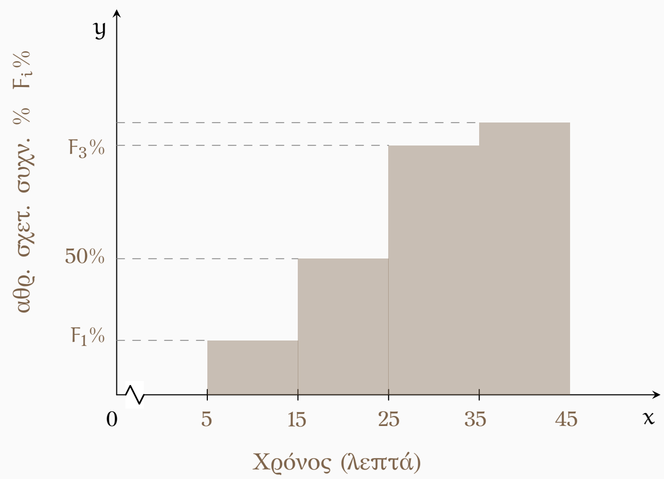
A3. **Ορισμός:** Ο *συντελεστής μεταβολής* ή *συντελεστής μεταβλητότητας*, για $\bar{x} \neq 0$, ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}\,, \text{ για } \bar{x} > 0\,.$$

Αν $\bar{x} < 0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$. $\square$

A4. α. $\longrightarrow$ *Λάθος*, β. $\longrightarrow$ *Σωστό*, γ. $\longrightarrow$ *Λάθος*, δ. $\longrightarrow$ *Σωστό*, ε. $\longrightarrow$ *Σωστό*. $\square$

ΘΕΜΑ Β. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



B1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

μον. 4

B2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

i	Χρόνος (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
1	$[5, \ldots)$		$\alpha + 4$			
2	$[\ldots, \ldots)$		$3\alpha - 6$			
3	$[\ldots, \ldots)$		$2\alpha + 8$			
4	$[\ldots, 45)$		$\alpha - 2$			
	Σύνολο					

μον. 8

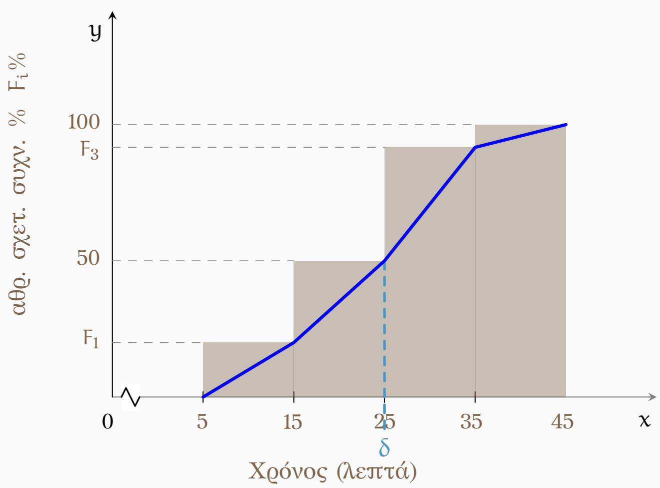
B3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. (Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

μον. 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

μον. 5

ΛΥΣΗ: B1. Για τη διάμεσο δ γνωρίζουμε ότι, αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή x για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Σύμφωνα με το ιστόγραμμα και την αντίστοιχη καμπύλη αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, έχουμε $\delta = 25$.



B2. Αφού η διάμεσος είναι 25, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που περιέχονται στις κλάσεις $[5, 15)$ και $[15, 25)$ πρέπει να είναι το ίδιο με το πλήθος των μαθητών που περιέχονται στις κλάσεις $[25, 35)$ και $[35, 45)$.

Άρα έχουμε: $\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 8$.

Συνεπώς για τη συμπλήρωση του πίνακα έχουμε $\nu_i = \alpha + 4 = 12$, $\nu_2 = 3\alpha - 6 = 18$, $\nu_3 = 2\alpha + 8 = 24$, $\nu_4 = \alpha - 2 = 6$ και τέλος $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 60$. Άρα

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 = \frac{12}{60} \cdot 100 = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20$$
$$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu} \cdot 100 = \frac{18}{60} \cdot 100 = \frac{3}{10} \cdot 100 = 30$$
$$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 = \frac{24}{60} \cdot 100 = \frac{2}{5} \cdot 100 = 40$$
$$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 = \frac{6}{60} \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$$

Επίσης

$N_1 = \nu_1 = 12$ $N_2 = N_1 + \nu_2 = 12 + 18 = 30$ $N_3 = N_2 + \nu_3 = 30 + 24 = 54$ $N_4 = N_3 + \nu_4 = 60$.

Επίσης

$F_1\% = f_1\% = 20$, $F_2\% = 50$, $F_3\% = F_2\% + f_3\% = 50 + 40 = 90$, $F_4\% = 100$.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω:

i	Χρόνος (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
1	[5, 15)	10	12	20	10	20
2	[15,25)	20	18	30	30	50
3	[25,35)	30	24	40	54	90
4	[35,45)	40	6	10	60	10
	Σύνολο		60	100		

Β3. Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής $\overline{x}$ σε ομαδοποιημένα δεδομένα έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24\,\text{λεπτά}\,.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της διακύμανσης (ή διασποράς) s^2 σε ομαδοποιημένα δεδομένα έχουμε:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \overline{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60}$$

$$= \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = 84\,\text{λεπτά}^2\,.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s^2 = \sqrt{s} = \sqrt{84} = 9,17\,\text{λεπτά}\,.$ □

Β4. Θεωρούμε ότι σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Επειδή στην κλάση $[35, 45)$ πλάτους 10 βρίσκεται το $f_4\% = 10\%$ των μαθητών, έπεται ότι στο διάστημα $[37, 45]$ πλάτους 8 βρίσκεται το $\frac{8}{10} f_4\% = 8$, δηλαδή το 8% των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ. Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει:

- Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

μον. 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu = 3$.

μον. 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

μον. 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

μον. 6

ΛΥΣΗ: Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να μιλάει Γαλλικά. Τότε $P(A) = \dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$.

Έστω B το ενδεχόμενο ο μαθητής να μιλάει Ισπανικά. Τότε $P(B) = \dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$.

Η πιθανότητα να μιλάει και τις δυο γλώσσες είναι $P(A\cap B) = \dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

Η πιθανότητα να μιλάει μια τουλάχιστον από τις δυο γλώσσες είναι

$$P(A\cup B) = \lim_{x\to -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}.$$

Γ1. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$ είναι το $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Έχουμε $\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x\,(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$

$\dfrac{2\,(x^2+3-4)}{x\,(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \dfrac{2\,(x-1)\,(x+1)}{x\,(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \dfrac{2\,(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\,(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \dfrac{2\,(-1-1)}{-1\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)} = 1$.

Είναι $P(A\cup B) = 1 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{N(A\cup B)}{N(\Omega)} = 1 \ \Leftrightarrow\ N(A\cup B) = N(\Omega)$ και επειδή βρισκόμαστε σε πεπερασμένο δειγματικό χώρο με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα έπεται ότι $A\cup B = \Omega$ (αν ήταν $A\cup B\subset\Omega$ τότε θα είχαμε $N(A\cup B) < N(\Omega)$, άτοπο). Οπότε το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο. □

Γ2. Είναι $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \ \Leftrightarrow\ 1 = \dfrac{3\nu}{\nu^2+1} + \dfrac{\nu+2}{\nu^2+1} - \dfrac{\nu+1}{\nu^2+1} \ \Leftrightarrow$

$\nu^2+1 = 3\nu+1 \ \Leftrightarrow\ \nu^2 = 3\nu$ με $\nu \geq 3$.

Τελικά $\nu = 3$, αφού τότε $P(A) = \dfrac{9}{10}$, $\quad P(B) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $\quad P(A\cap B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. □

Γ3. Η πιθανότητα να μιλά μόνο μια απο τις δυο γλώσσες είναι

$$P(A\cup B) - P(A\cap B) = 1 - \frac{3+1}{3^2+1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \quad \square$$

Γ4. Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε

$P(A\cap B) = \dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} \ \Leftrightarrow\ \dfrac{4}{10} = \dfrac{32}{N(\Omega)} \ \Leftrightarrow\ N(\Omega) = 80$ μαθητές. □

ΘΕΜΑ Δ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{x}\,,\ x>0\,.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

μον. 5

Δ2. Έστω $M(x, f(x))\,,\ x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου OKΛM γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

μον. 7

Δ3. Έστω η ευθεία ε $y = \lambda x + \beta\,,\ \beta \neq 10\,,$ η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 10$ της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους xi να έχουν μέση τιμή $\overline{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

μον. 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f\big(P(A)\big) + f\big(P(A\cap B)\big) \geq 2\, f\big(P(A\cup B)\big)\,.$$

μον. 5

ΛΥΣΗ: **Δ1.** Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο εν λόγω διάστημα με

$$f'(x) = \frac{\left(1+\ln^2 x\right)' x - (x)'(1+\ln^2 x)}{x^2} = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0\,,\ x>0\,.$$

Παρατηρούμε πως $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e\,.$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$. Επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. $\square$

Δ2. Παρατηρούμε αρχικά ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x>0$. Είναι:

$$(OK) = |x| \overset{x>0}{=\!=} x$$
$$(O\Lambda) = |f(x)| \overset{f(x)>0}{=\!=\!=} f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου OKMΛ είναι:

$$E(x) = (OK)\,(O\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad E(x) = 1 + \ln^2 x\,,\ x > 0\,.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = 1 + \ln^2 x, x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και η παράγωγός της είναι

$E'(x) = (1 + \ln^2 x)' = 2\ln x\,(\ln x)' = \dfrac{2\ln x}{x}, \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad E'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}, \quad x > 0\,.$

$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\ln x}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\,.$

$E'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\ln x}{x} > 0 \quad \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad \ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1\,.$

$E'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\ln x}{x} < 0 \quad \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad \ln x < 0 \quad \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad 0 < x < 1\,.$

- $E'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Άρα η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- $E'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Άρα η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- για $x = 1$ είναι $E'(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Άρα η $E(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο όταν $(OK) = x = 1$ και $(O\Lambda) = f(1) = 1$, δηλαδή όταν το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο. □

Δ3. Αφού η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$ θα είναι $\lambda = f'(1) = -\dfrac{(\ln 1 - 1)^2}{1^2} = -1$.

Επομένως η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -x + \beta$.

Οι τεταγμένες των δέκα σημείων είναι $y_i = -x_i + \beta\ ,\ i = 1, 2, ..., 10$.

Έστω $z_i = -x_i\ ,\ i = 1, 2, ..., 10$. Τότε $\overline{z} = -\overline{x} = -10$ και $s_z = |-1|\,s_x = 2$.

Επίσης $y_i = z_i + \beta\ ,\ i = 1, 2, ..., 10$. Τότε $\overline{y} = \overline{z} + \beta = \beta - 10$ και $s_y = s_z = 2$.

Άρα $CV_y = \dfrac{s_y}{|\overline{y}|} = \dfrac{2}{|\beta - 10|}$.

Το δείγμα των τεταγμένων των δέκα σημείων είναι ομοιογενές αν και μόνο αν

$CV_y \leq \dfrac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{|\beta - 10|} \leq \dfrac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad |\beta - 10| \geq 20 \quad \Leftrightarrow$

$\beta - 10 \leq -20$ ή $\beta - 10 \geq 20 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq -10$ ή $\beta \geq 30$. □

Δ4. Τα A, B είναι ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αφού $A \neq \varnothing, A \cap B \neq \varnothing$, έπεται ότι $0 < P(A) \leq 1, \quad 0 < P(A \cap B) \leq 1, \quad 0 < P(A \cup B) \leq 1$.
Η συνάρτηση f στο διάστημα $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως

$$A \subseteq A\cup B \;\Rightarrow\; P(A) \le P(A\cup B) \;\Rightarrow\; f(P(A)) \ge f(P(A\cup B)) \quad (1)$$
$$A\cap B \subseteq A\cup B \;\Rightarrow\; P(A\cap B) \le P(A\cup B) \;\Rightarrow\; f(P(A\cap B)) \ge f(P(A\cup B)) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) παίρνουμε

$$f\big(P(A)\big) + f\big(P(A\cap B)\big) \ge 2\,f\big(P(A\cup B)\big)\,. \quad \square$$

Σχόλια:

A2 **(Εναλλακτική απόδειξη)** Έστω $F(x) = f(x) + g(x)$. Τότε για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Οπότε $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'A(x_0) + g'A(x_0)\,.$ Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, έπεται $\;(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)\,.\;\; \square$

A4. **Εξήγηση των προτάσεων σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:**

α.$\longrightarrow$ *Λάθος*, (σελ. 70 σχολικού βιβλίου: «Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων»)

β.$\longrightarrow$ *Σωστό*, (σελ. 23 σχολικού βιβλίου: «Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.»)

γ.$\longrightarrow$ *Λάθος*, (σελ. 151 σχολικού βιβλίου: «Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$»)

δ.$\longrightarrow$ *Σωστό*, (σελ. 91 σχολικού βιβλίου: «Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.»)

ε.$\longrightarrow$ *Σωστό* (σελ. 16 σχολικού βιβλίου: «Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\displaystyle\lim_{x\to x_0} ημ\,x = ημ\,x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} συν\,x = συν\,x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\displaystyle\lim_{x\to x_0} εφ\,x = εφ\,x_0$, όταν $συν\,x_0 \neq 0$»). $\square$

B1 Ο άξονας $y'y$ του ιστογράμματος αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται σε $F_i\%$. Συνεπώς οι αριθμοί που βρίσκονται σε αυτόν δε θα έπρεπε να έχουν το σύμβολο «%».

B2 **Εναλλακτικά για την εύρεση του α :**

$$F_2\% = 50 \;\Leftrightarrow\; \frac{(\alpha+4)+(3\alpha-6)}{\nu} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \alpha = 8\,. \quad \square$$

B3 Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τον τύπο $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\,\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\,\nu_i\right)^2}{\nu}\right]$ με

$\displaystyle\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2\,\nu_i = 39.600$ και $\displaystyle\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\,\nu_i = 1.440$, έχουμε

$$s^2 = \frac{1}{60}\left(39.600 - \frac{1.440^2}{60}\right) = \frac{1}{60}\,(39.600 - 34.560) = \frac{5.040}{60} = 84 \text{ λεπτά}^2\,. \quad \square$$

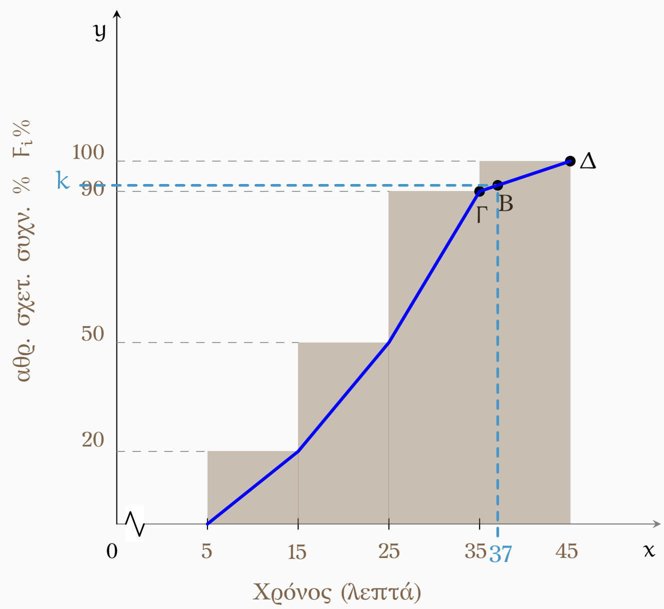
B4 (**Εναλλακτική προσέγγιση**)

Θα χρησιμοποιήσουμε το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων, στο οποίο αναζητούμε το σημείο B με συντεταγμένες $(37, k)$. Οι μαθητές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσουν το πρόβλημα βρίσκονται στο διάστημα $[35, 45)$, στο οποίο ψάχνουμε το ποσοστό των παρατηρήσεων. Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(35, 90)$ και $\Delta(45, 100)$.

Έστω $y = \alpha x + b$ η εξίσωση της ευθείας $(\Gamma\Delta)$. Τότε αφού $\Gamma \in (\Gamma\Delta)$ και $\Delta \in (\Gamma\Delta)$, έχουμε:

$$90 = 35\alpha + b \text{ και } 100 = 45\alpha + b \quad \Rightarrow \quad \text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, b) = \text{Μ.Κ.Δ.}(1, 55)\,.$$

Συνεπώς $y = x + 55$ είναι η εξίσωση της ευθείας $(\Gamma\Delta)$, στην οποία ανήκει το $B(37, k)$. Άρα προκύπτει ότι $k = 37 + 55 = 92$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι $100\% - 92\% = 8\%$.



• Ας σημειωθεί ότι υπάρχει πρόβλημα στο ότι εάν βρούμε πρώτα το πλήθος των μαθητών στο διάστημα $[37, 45)$, τότε θα είναι τα $\frac{8}{10}$ του 6, δηλαδή 4, 8 μαθητές! □

Γ1 (**Εναλλακτική προσέγγιση**)

Ας υποθέσουμε ότι $A \subset \Omega$. Τότε υπάρχει στοιχείο $\omega \in \Omega - A$.

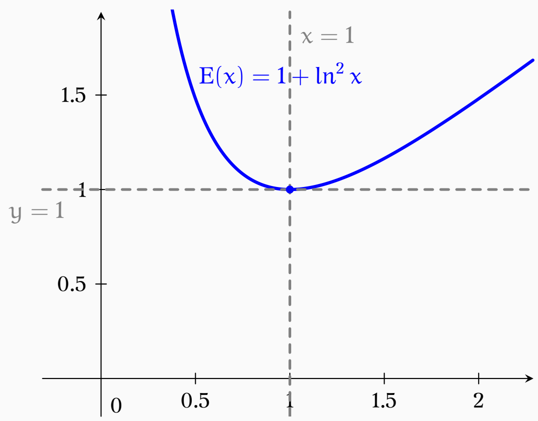
Όμως καθώς $\{\omega\} \subseteq \Omega - A$, έπεται ότι

$P(\{\omega\}) \leq P(\Omega - A) = P(\Omega) - P(\Omega \cap A) = 1 - 1 = 0$.

Άρα $P(\{\omega\}) = 0$, άτοπο διότι τα απλά ενδεχόμενα δεν έχουν πιθανότητα 0. □

Γ2 Το δεδομένο $\nu \geq 3$ είναι περιττό, αφού για $\nu = 0$ παίρνουμε $P(B) = 2$. Άτοπο, οπότε η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται. □

Δ2 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



• **Διαφορετικά για το ελάχιστο της** $E(x) = \ln^2 x + 1, \quad x > 0$:

Είναι $\ln^2 x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln^2 x + 1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad E(x) \geq 1$. Η ισότητα λαμβάνεται μόνο για $x = 1$. Άρα βρίσκουμε ελάχιστο για $x = 1$ το $E(x) = 1$. □

• Σύμφωνα με την εκφώνηση χρειάζεται επιπλέον να δειχθεί ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $(OK) = (O\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\ln^2 x}{x} = x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \ln^2 x - x^2 = 0$ είναι η $x = 1$.

Παρά το ότι μία τέτοια απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος, παραθέτουμε δύο προσεγγίσεις για λόγους πληρότητας παρακάτω:

1η προσέγγιση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + \ln^2 x - x^2, x > 0$, για την οποία αρκεί να δείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Έχουμε $g'(x) = 2\left(\frac{\ln x}{x} - x\right)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x < x^2$ για κάθε $x > 0$.

Επειδή όμως, για κάθε x, ισχύει $x < x^2 + 1$, έχουμε ότι $\ln x < \ln(x^2 + 1) \leq x^2$, λόγω της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$, η οποία μπορεί να αποδειχθεί εύκολα μελετώντας τη συνάρτηση $h(x) = \ln x - x - 1$.

2η προσέγγιση: $(OK) = (O\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\ln^2 x}{x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\ln^2 x}{x} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = T(1)$, όπου $T(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x} - x = f(x) - x$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, αφού οι f και $h(x) = -x$ ειναι γνησίως φθίνουσες.

Άρα το x παίρνει την τιμή 1 μια μόνο φορά. □