ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΑΝ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 3 Α ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΤΟΥ 2009

Λεωνίδας Γ. Ιωσηφίδης
Μαθηματικός Δ.Ε.
2ο Γυμνάσιο Σάμου
Πέμπτη 21/5/2009
iosifile@yahoo.gr

Σε αυτό το άρθρο θέλω να εκφράσω τον προβληματισμό μου στη λύση που δόθηκε από πολλούς συναδέλφους σχετικά με το φετινό θέμα 3 Α των μαθηματικών κατεύθυνσης στις 20/5/2009. Δεν αναφέρομαι για λάθος θέμα, προς αποφυγή παρεξηγήσεων, αλλά για σοβαρές παραλείψεις στην απόδειξη του 3 Α.

Πιο συγκεκριμμένα, η πιο διαδεδομένη λύση που κυκλοφόρησε στο internet αλλά και στον τύπο (και υπάρχει και στα περισσότερα βιβλία) είναι η εξής:

Παρατηρούμε ότι

$f(x) \geq 1 = f(0), \forall x \in A = (-1, +\infty)$ *άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο 0*

Το 0 είναι εσωτερικό του A

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ως (συνθεση-διαφορά-άθροισμα) πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων , άρα και στο 0

Οπότε από το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$

Όμως

$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{1+x}, \; x > -1 \Rightarrow$$
$$f'(0) = (\ln a) - 1 \Rightarrow$$
$$\ln a = 1 \Rightarrow$$
$$a = e$$

Εδώ όμως έχουμε μια σημαντική παράλειψη:

ΔΕΝ ΑΠΟΔΕΙΞΑΜΕ ΤΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ x_1 ΓΙΑ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΙΣΧΥΕΙ $f'(x_1) = 0$.

Διότι αν η f παρουσιάζει το ίδιο ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ όπου $x_0 \neq 0$, τότε δεν είναι σίγουρο ότι α=e αλλά μπορεί το α να παίρνει και άλλη τιμή. Άρα πρέπει να δείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης f(x)=1. Για αυτό πρέπει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $f'(x)=0$. Για αυτό πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της $f''(x)$.

$$f''(x)=\left(\ln\alpha\right)^2 \alpha^x + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 > 0,\ \forall x>-1$$

Άρα η $f'(x)$ είναι 1-1 για κάθε τιμή του α, άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς 1 λύση για κάθε τιμή του α. Όμως η συνθήκη $f'(0) = 0$ ικανοποιείται μόνο όταν α=e.