ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
2	6	12
3	x_2	$3x_2$
5	3	15
8	4	32
ΣΥΝΟΛΟ	$13 + x_2$	$59 + 3x_2$

α. Είναι: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{59 + 3x_2}{13 + x_2} \Leftrightarrow 52 + 4x_2 = 59 + 3x_2 \Leftrightarrow x_2 = 7$

β. Είναι $s^2 = \dfrac{\sum v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{v} = \dfrac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{20} =$

$= \dfrac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \dfrac{98}{20} = 4,9.$

γ. Είναι: $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \dfrac{2,2}{4} = 0,55 = 55\% > 10\%$, άρα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x - 12.$$

Η ισότητα $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow -9 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$

β. Για $x \neq$, είναι: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(x-3)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{3(1-3)}{1+1} = -3.$

γ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$.

Τότε:

$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Το σημείο Μ είναι: $M\big(2,\ f(2)\big) = M(2, -5)$.
Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Μ έχει εξίσωση: $y = -3x + \beta$.
Οπότε: $-5 = -6 + \beta \iff \beta = 1$, άρα (ε): $y = -3x + 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Αα,β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της, με $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x},\ x > 0$.

Είναι: $f'(x) = 0 \iff x = 2$, $f'(x) > 0 \iff 0 < x < 2$ και $f'(x) < 0 \iff 2 < x$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$			↗		↘	
				τ. μ.		

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, 2]$ και γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.
Έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$.

Β. Είναι:
$f(2) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 2 + 1$
$f(4) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 4$
$f(8) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 8 - 2$
$f(3) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 3 + 0{,}5$
$f(5) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 5 - 0{,}5$

α. Αφού η f είναι γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, θα είναι:
$f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)$, οπότε $R = f(2) - f(8) = \ln 2 - \ln 8 + 3 = \ln\frac{2}{8} + 3 = \ln\frac{1}{4} + 3$
και $\delta = f(4) = \lambda^2 - 6\lambda + \ln 4$

β. $R + \delta < -2 \iff 3 + \ln\frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 + \cancel{\ln 1} < 0 \iff 1 < \lambda < 5$.
Οπότε, λ = 2 ή 3 ή 4.
$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0{,}03$.

Γιώργος Ρίζος