ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2\left(2y-x\right)=x^2y^4-36.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathrm{O}xy$ θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_1(40,1)$, $\mathrm{A}_2(40,2)$, $\ldots$, $\mathrm{A}_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$ θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

$$MZ\perp BC\Leftrightarrow\left(CA=CB\quad \text{ή}\quad Z\equiv O\right),$$

δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA=CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά ***Καλή επιτυχία***
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες