ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ, και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελίδα 186.

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

Σχήμα 1: Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Σχήμα 2: Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Σχήμα 3: Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Απάντηση:

Σωστό.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 35.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Σχήμα 4: Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Απάντηση:

Σωστό.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 26.

• Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h\circ g\circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Σχήμα 5: Σχολικό βιβλίο σελίδα 26

γ) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = -\infty$.

Απάντηση:

Λάθος.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 60.
Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ και γενικά } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty,\ \nu\in\mathbb{N}^* \text{ (Σχ. 57α)}$$

Σχήμα 6: Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Απάντηση:

Λάθος.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 156.
Ισχύει ότι αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **κάτω** από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Σχήμα 7: Σχολικό βιβλίο σελίδα 156

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Απάντηση:

Σωστό.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 116.

116 *2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Σχήμα 8: Σχολικό βιβλίο σελίδα 116

Συνεπώς συγκεντρωτικά έχουμε ότι:

Α4.α)	**Α4.β)**	**Α4.γ)**	**Α4.δ)**	**Α4.ε)**
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9,\ x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$ και το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$, οπότε από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Β2. Για $\alpha = -6$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Απάντηση:

Για $\alpha = -6$, έχουμε ότι:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3,\ x \in D_f = \mathbb{R}$$

και

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3),\ x \in D_{f'} = \mathbb{R}.$$

Τότε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$,
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 3$,
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Άρα η συνάρτηση f :

- είναι συνεχής στα $(-\infty, 1],\ [3, +\infty)$, παραγωγίσιμη στα $(-\infty, 1),\ (3, +\infty)$, με $f'(x) > 0,\ x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1],\ [3, +\infty)$.
- είναι συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, με $f'(x) < 0,\ x \in (1, 3)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Τότε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1, 3)$, οπότε

$$f(A_2) = \left(\lim_{x\to 3^-} f(x), f(1)\right] = (-3, 1].$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_3 = [3, +\infty)$, οπότε

$$f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-3, +\infty).$$

Συνεπώς:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει $f(0)f(1) = (-3)\cdot 1 = -3 < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα x_1 της $f(x) = 0$ στο $(0, 1)$. Όμως $(0, 1) \subseteq A_1 = (-\infty, 1)$, οπότε $x_1 \in A_1$ και δεδομένου ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1, υπάρχει στο A_1 μοναδική ρίζα x_1 της $f(x) = 0$.
- $0 \in f(A_2)$, άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_2, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα υπάρχει στο A_2. μοναδική ρίζα x_2 της $f(x) = 0$.
- $0 \in f(A_3)$, άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_3, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει στο A_3 μοναδική ρίζα x_3 της $f(x) = 0$.

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $D_f = D_{f''} = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$f''(x) = 6x + 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Τότε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 6x = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$,
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x + 2 > 0 \Leftrightarrow 6x > -2 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$,
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x + 2 < 0 \Leftrightarrow 6x < -2 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{3}$,

Άρα η συνάρτηση f :

- είναι συνεχής στο $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, με $f''(x) < 0,\ x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$.
- είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{3}, + - \infty\right)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, με $f''(x) > 0,\ x \in \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

Τέλος, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, κοίλη στο $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $\left(-\dfrac{1}{3}, f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, οπότε παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = -\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

B4. Έστω $g(x) = x + f(x),\ x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

Απάντηση:

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi).$$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$g'(x) = 1 + f'(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = g(\xi) + g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = (\xi + f(\xi)) + (1 + f'(\xi))(x-\xi).$$

Το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) = (\xi + f(\xi)) + (1 + f'(\xi))(x-\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi)x - f'(\xi)\xi = \xi + f(\xi) + x - \xi + f'(\xi)x - f'(\xi)\xi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0,$$

οπότε οι εφαπτομένες τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\eta\mu x}, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$ (μονάδες 2), αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Απάντηση:

– Για $x < 0$, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} xe^{\eta\mu x} = 0,$$

– για $x > 0$, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0,$$

και

– $f(0) = 0$,

οπότε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0,$$

άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
Επίσης, για $x > 0$, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x},$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty,$$

άρα, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Απάντηση:

- Για $x < 0$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών x (πολυωνυμική), $e^{\eta\mu x}$ (σύνθεση των συνεχών e^x-εκθετική, $\eta\mu x$-τριγωνομετρική).
- Επίσης, για $x > 0$ η η συνάρτηση f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $\sqrt{x}$ (άρρητη), $x^2 + x$ (πολυωνυμική).
- Επίσης στο **Γ1** αποδείξαμε ότι είναι συνεχής στο $x = 0$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επίσης:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x},$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2},$$

οπότε η ευθεία με εξίσωση $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και κατά συνέπεια δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Τέλος:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x \eta\mu(x)) = 0,$$

αφού

$$|e^x \eta\mu(x)| = |e^x|\,|\eta\mu(x)| \le |e^x|\,,$$

οπότε

$$-|e^x| \le e^x \eta\mu(x) \le |e^x|\,.$$

Όμως

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

άρα

$$\lim_{x\to-\infty} (-|e^x|) = \lim_{x\to-\infty} (|e^x|) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty} [e^x \eta\mu(x)] = 0$. Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και κατά συνέπεια δεν υπάρχει πλάγια (μη οριζόντια) ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right), \quad x \in [-\pi, 0].$$

Η h είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως ως διαφορά των συνεχών f, $\frac{1}{2}x+1$ (πολυωνυμική) και $h(-\pi) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $h(0) = -1 < 0$, δηλαδή $h(-\pi)h(0) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x), x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $x(t)$ να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του y να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x.

Μονάδες 7

Απάντηση:

Για $t \geq 0$, έχουμε ότι:

$$x(t) \geq 0, \;\; x'(t) > 0,$$

και

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}.$$

Τότε:

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t)[2x(t)+1]}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}, \; t > 0,$$

αφού για $t = 0$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Έστω ότι υπάρχει $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{x'(t_0)[2x(t_0)+1]}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow} \frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [2x(t_0)+1]^2 = [2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4[x^2(t_0) + x(t_0)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0,$$

που είναι ΑΤΟΠΟ, άρα δεν υπάρχει τέτοιο t_0.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και μια παράγουσα F της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, για \;\; κάθε x > 0.$$

Δίνεται επίσης ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}},\ x > 0$ είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Απάντηση:

- Η συνάρτηση h με $h(x) = x^{ln(x)}$, είναι ορισμένη στο $D_h = (0, +\infty)$ και ισχύει

$$h(x) = e^{\ln(x)^{\ln(x)}} = e^{\ln^2(x)}, x > 0.$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $D_h = (0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων e^x (εκθετική), x^2 (πολυωνυμική) και $\ln(x)$ (λογαριθμική).
- Επίσης, η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $D_{h'} = (0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x (εκθετική), x^2 (πολυωνυμική) και $\ln(x)$ (λογαριθμική) με

$$h'(x) = e^{\ln^2(x)} 2\ln(x)\frac{1}{x},\ x > 0.$$

* Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $D_g = (0, +\infty)$ ως πηλίκο των συνεχών F (είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής στο $(0, +\infty)$) και $x^{\ln(x)}$ (είναι η συνάρτηση h που θέσαμε προηγουμένως).
* Επίσης, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $D_g = (0, +\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων F (είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$) και $x^{ln(x)}$ (είναι η συνάρτηση h που θέσαμε προηγουμένως).

Συνεπώς για $x > 0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)h(x) - F(x)h'(x)}{h^2(x)} = \\ &= \frac{f(x)e^{\ln^2(x)} - F(x)e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\dfrac{1}{x}}{(e^{\ln^2(x)})^2} = \\ &= \frac{f(x) - F(x)2\ln(x)\dfrac{1}{x}}{e^{\ln^2(x)}} = \\ &= \frac{xf(x) - F(x)2\ln(x)}{xe^{\ln^2(x)}} \overset{(Y)}{=} \\ &= \frac{0}{xe^{\ln^2(x)}} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. **i)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. **(μονάδες 4)**

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ **(μονάδες 3)** και ότι $F(x) = x^{\ln x}$ για κάθε $x > 0$ **(μονάδες 2)**.

Σύνολο μονάδων: 9

Απάντηση:

i) Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε με εξίσωση $y = 2x$, ισχύει

$$f'(1) = 2. \tag{2}$$

Για $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \overset{(2)}{=} 2, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{lnx} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x = 1, \tag{4}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \frac{x-1}{lnx} \right) \overset{(3),(4),(6)}{=} 2, \tag{5}$$

αφού για $x = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$1f(1) = 2F(1)\ln(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = F'(1) = 0. \tag{6}$$

ii) Οι συναρτήσεις $xf(x)$, $2F(x)\ln x$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε παραγωγίζοντάς τη δοσμένη σχέση βρίσκουμε:

$$f(x)+xf'(x)=2F'(x)\ln x+2F(x)\frac{1}{x},$$

όπου θέτοντας $x=1$, βρίσκουμε

$$f(1)+1\cdot f'(1)=2F'(1)\ln(1)+2F(1)\cdot\frac{1}{1}\overset{(2),(6)}{\Rightarrow}2=2F(1)\Leftrightarrow F(1)=1. \quad (7)$$

Αφού η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$g(x)=c\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x^{\ln(x)}}=c\Leftrightarrow F(x)=cx^{\ln(x)}.$$

Η σχέση αυτή για $x=1$ δίνει:

$$F(1)=c\cdot 1^{\ln(1)}\Leftrightarrow c=F(1)\overset{(7)}{\Leftrightarrow}c=1,$$

οπότε

$$F(x)=x^{\ln(x)},\ x\in D_F=(0,+\infty).$$

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $2F(x)=F(x^2)-1$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Απάντηση:

Έχουμε ότι:

$$F(x)=x^{\ln(x)}=e^{ln^2(x)},\ x\in D_F=(0,+\infty).$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $D_{F'}=(0,+\infty)$, με

$$F'(x)=e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x},\ x\in D_{F'}=(0,+\infty).$$

Τότε για $x>0$, έχουμε:

$$F'(x)=0\Leftrightarrow e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow ln(x)=0\Leftrightarrow x=1,$$

$$F'(x)>0\Leftrightarrow e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow ln(x)>0\Leftrightarrow x>1,$$

$$F'(x)<0\Leftrightarrow e^{\ln^2(x)}2\ln(x)\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow ln(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Συνεπώς αφού $F'(x)>0$ για $x>1$ και η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και αφού $F'(x)<0$ για $0<x<1$ και η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Η εξίσωση

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2,\ x > 0 \tag{8}$$

έχει προφανή ρίζα το 1.

- Αν $0 < x < 1$, τότε $0 < x^2 < x < 1$ και αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ ισχύει

$$F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0.$$

- Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1$ και αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ισχύει

$$F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0.$$

Συνεπώς ισχύει

$$F(x^2) - F(x) > 0,\ \ x \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \tag{9}$$

Όμως

$$-(x-1)^2 < 0,\ \ x \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \tag{10}$$

οπότε από τις (9), (10), προκύπτει ότι η εξίσωση (8) είναι αδύνατη στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (θετικό πρώτο μέλος και αρνητικό δεύτερο μέλος).

Συνεπώς η εξίσωση (8) έχει μοναδική ρίζα $x = 1$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$, ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$e^x \geq x + 1,\ x \in \mathbb{R},$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε ισχύει

$$e^{\ln^2(x)} \geq \ln^2(x) + 1,\ x \in (0, +\infty), \tag{11}$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln^2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Επομένως ολοκληρώνοντας της (11) στο διάστημα $[1, e]$, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^e e^{\ln^2(x)} dx > \int_1^e (\ln^2(x) + 1) dx \Leftrightarrow \int_1^e F(x) dx > 2e - 3, \tag{12}$$

αφού

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\ln^2(x) + 1) dx &= \int_1^e \ln^2(x) dx + \int_1^e dx = \\
&= \int_1^e [(x)' \ln^2(x)] dx + [x]_1^e = \\
&= [x \ln^2(x)]_1^e - \int_1^e \left[2x \ln(x) \frac{1}{x} \right] dx + e - 1 = \\
&= e \ln^2(e) - 1 \ln^2(1) - 2 \int_1^e \ln(x) dx + e - 1 = \\
&= e - 2[x \ln(x) - x]_1^e + e - 1 = \\
&= e - 2[e \ln(e) - e - 1 \ln(1) + 1] + e - 1 = \\
&= e - 2 + e - 1 = 2e - 3.
\end{aligned}$$

Επίσης, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, ισχύει:

$$x \geq 1 \Leftrightarrow F(x) \geq F(1) = 0. \tag{13}$$

Συνεπώς για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$, ισχύει:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx \overset{(13)}{=} \int_1^e F(x) dx \overset{(12)}{>} 2e - 3.$$